CHAPITRE - II

METHODES DE CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DU VECTEUR DE SES VALEURS EN DES ABSCISSES DISCRETES

APPLICATION AU CALCUL APPROCHE DES COEFFICIENTS DE FOURIER

II-1 - RELATION ENTRE D.F.T. ET TRANSFORMATION DE FOURIER

II-1-1 - Distribution Δ . Produit Δg

Soit Δ la distribution sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\Delta = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k\frac{T}{N}} \qquad \text{(II-1 ; 1)}$$

où δ_α est la mesure de Dirac placée à l'abscisse α .
δ_α est une distribution à support ponctuel donc compact ($\delta_\alpha \in \mathcal{E}'$) qui à toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}$ (ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$) fait correspondre un scalaire noté $<\delta_\alpha,\varphi>$ tel que (cf. SCHWARTZ [1] page 83)

$$<\delta_\alpha,\varphi> \; = \varphi(\alpha)$$

Naturellement $\Delta \in \mathcal{E}'$ et

$$\langle\Delta,\varphi\rangle = \langle \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{\frac{kT}{N}},\varphi\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \langle\delta_{\frac{kT}{N}},\varphi\rangle$$

$$\langle\Delta,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(\frac{kT}{N})$$

Soit maintenant g une fonction continue et bornée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes.

SCHWARTZ ([1] p. 99-100) a montré que dans ce cas on pouvait définir le produit $\Delta.g$ comme étant une distribution vérifiant :

$$\langle\Delta g,\varphi\rangle = \langle\Delta,g\varphi\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g(\frac{kT}{N}).\varphi(\frac{kT}{N})$$

En posant :

$$g(\frac{kT}{N}) = g_k \qquad k = 0,\ldots,N-1$$

$$\langle\Delta g,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle g_k\ \delta_{\frac{kT}{N}},\varphi\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta g = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\ \delta_{\frac{kT}{N}}} \qquad (II-1\ ;\ 2)$$

Δg est une distribution à support borné. Sa transformée de Fourier est donnée par (cf. SCHWARTZ [1] p. 210) :

$$\mathcal{F}[\Delta g](f) = \langle \Delta g(t), e^{-2i\pi ft} \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} g_k \langle \delta_{\frac{kT}{N}}, e^{-2i\pi ft} \rangle$$

$$\mathcal{F}[\Delta g](f) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, e^{-2i\pi f \frac{kT}{N}}$$

Si la fréquence f prend les valeurs $\frac{j}{T}$ (ce qui correspond à un nombre entier de périodes sur $[0,T]$)

$$\mathcal{F}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} \qquad \text{(II-1 ; 3)}$$

En calculant la Transformée de Fourier inverse de Δg, on aurait obtenu :

$$\overline{\mathcal{F}}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} \qquad \text{(II-1 ; 4)}$$

Or, nous avons vu que, partant d'un vecteur de coordonnées g_k $(k=0,\dots,N-1)$ D.F.T. et I.D.F.T. fournissaient deux vecteurs $\vec{G}^-$ et $\vec{G}^+$ par les formules (I-8;2)

$$G_j^- = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \qquad G_j^+ = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_j^- = \frac{1}{N}\mathcal{F}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right)} \qquad \boxed{G_j^+ = \overline{\mathcal{F}}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right)} \qquad \text{(II-1 ; 5)}$$

Effectuer la D.F.T. (ou l'I.D.F.T.) sur un vecteur de coordonnées g_k *revient donc (à un coefficient multiplicatif près égal à* $\frac{1}{N}$ *dans le cas de la D.F.T.) à calculer la Transformée de Fourier (ou son inverse) d'une distribution de masses de Dirac de poids* g_k *placées aux abscisses* $\frac{kT}{N}$ *pour des valeurs de la fréquence égales à* $\frac{j}{T}$.

Voyons le lien qui existe entre les G_j^- et la transformée de Fourier de la fonction g.

$$G_j^- = \frac{1}{N}\,\mathcal{F}[\Delta g]\left(\frac{j}{T}\right).$$

La propriété fondamentale de la Transformation de Fourier qui transforme convolution en multiplication et multiplication en convolution (cf. SCHWARTZ [1] p. 218) appliquée à $\mathcal{F}\,[\Delta g]$ nous donne :

$$\boxed{G_j^- = \frac{1}{N}\,[\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F} g]\left(\frac{j}{T}\right)} \qquad \text{(II-1 ; 6)}$$

$$G_j^- = \left\langle \frac{1}{N}\,\mathcal{F}\Delta\left(\frac{j}{T} - \lambda\right), \mathcal{F} g(\lambda)\right\rangle \qquad \text{(II-1 ; 7)}$$

G_j^-, *est la valeur en* $\frac{j}{T}$ *du produit de convolution de la fonction* $\frac{1}{N}\,\mathcal{F}\Delta$ *par la T.F. de g.* De même G_j^+ est la valeur en $\frac{j}{T}$ du produit de convolution de la fonction $\overline{\mathcal{F}}\Delta$ par la T.F. inverse de g .

II-1-2 - Transformée de Fourier de Δ/N

$\Delta/N \in \mathcal{E}'$ et l'on peut écrire :

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta_{\frac{kT}{N}}(t),\ e^{-2i\pi\lambda t}\rangle$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{T}{N}\lambda k} \qquad \text{(II-1 ; 8)}$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{1-e^{-2i\pi T\lambda}}{1-e^{-2i\pi\frac{T}{N}\lambda}}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{e^{-i\pi T\lambda}}{e^{-i\pi\frac{T}{N}\lambda}}\left[\frac{e^{i\pi T\lambda}-e^{-i\pi T\lambda}}{e^{i\pi\frac{T}{N}\lambda}-e^{-i\pi\frac{T}{N}\lambda}}\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta(\lambda) = \frac{\sin\pi T\lambda}{N\sin\pi\frac{T}{N}\lambda}\, e^{-i\pi T(1-\frac{1}{N})\lambda}} \qquad \text{(II-1 ; 9)}$$

Remarquons que :

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta(0) = 1$$

$$\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta\left(\frac{p}{T}\right) = 0 \qquad \text{pour } p = 1,2,\ldots,N-1 \qquad \text{(II-1 ; 10)}$$

La formule (II-1 ; 8) montre que $\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta$ est une fonction périodique de période $\frac{N}{T}$ dont les coefficients de Fourier sont égaux à $\frac{1}{N}$ pour $k = 0,\ldots,N-1$ et nuls pour les autres valeurs de k.

Sur la figure 1 on a représenté les tracés de la partie réelle, de la partie imaginaire et du carré du module de cette fonction.

Remarque :
La périodicité de $\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta$ entraîne celle de $\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F}g$ avec la même période, et ce quel que soit $\mathcal{F}g$.

$$G^-_{kN+j} = [\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F}g]\,(\frac{kN+j}{T}) = [\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F}g]\,(\frac{j}{T}) = G^-_j$$

Il est inutile de calculer G^-_j *pour plus de* N *valeurs consécutives de l'indice* j.

On a vu que l'algorithme de Cooley et Tukey permettait d'obtenir G^-_j pour $j = 0,\ldots,N-1$. Mais il est préférable de considérer les G^-_j obtenus pour $j = \frac{N}{2},\ldots,N-1$ comme les valeurs de $[\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta * \mathcal{F}g]\,(\frac{j-N}{T})$ puisque cela correspond à des valeurs de la fréquence, négatives, mais plus petites en valeur absolue.

II-2 - APPLICATION AU CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER D'UNE FONCTION PERIODIQUE

Soit g_T une fonction continue et bornée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodique de période T et telle qu'on puisse la développer en série de Fourier :

$$g_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\, e^{2i\pi\frac{m}{T}t} \qquad \text{(II-2 ; 1)}$$

On suppose :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |C_m| < +\infty \qquad \text{(II-2 ; 2)}$$

Aux instants $\frac{kT}{N}$ $(k = 0,\dots,N-1)$, la fonction g_T prend les valeurs :

$$g_k = g_T(\frac{kT}{N})$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \, e^{2i\pi\frac{mk}{N}}$$

$$\forall m \in Z, \quad \exists s \in Z, \quad \exists q \in \{0,\dots,N-1\} \quad | \quad m = sN+q$$

La convergence des modules de la série C_m (II-2 ; 2) permet d'écrire :

$$g_k = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+q} \, e^{2i\pi\frac{(sN+q)m}{N}}$$

$$= \sum_{q=0}^{N-1} \left(\sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+q} \right) e^{2i\pi\frac{qm}{N}}$$

$$g_k = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q \, e^{2i\pi\frac{qm}{N}} \tag{II-2 ; 3}$$

La fonction $\tilde{g}_T(t) = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q e^{2i\pi\frac{q}{T} t}$ a la même période T que g_T et prend les mêmes valeurs g_k aux abscisses $\frac{kT}{N}$ (c'est l'interpolation trigonométrique de degré N de g_T).

Δ étant défini par (II-1 ; 1), le produit Δg_T ne faisant intervenir g_T que par ses valeurs aux abscisses $\frac{kT}{N}$, on a :

$$\frac{1}{N} \Delta g_T = \frac{1}{N} \Delta \tilde{g}_T$$

Ce qui entraîne :

$$G_j^- = \frac{1}{N}\mathcal{F}[\Delta g_T]\left(\frac{j}{T}\right) = \frac{1}{N}\mathcal{F}[\Delta\tilde{g}_T]\left(\frac{j}{T}\right)$$

D'après (II-1 ; 7) :

$$G_j^- = \left\langle\frac{1}{N}\mathcal{F}\Delta\left(\frac{j}{T}-\lambda\right),\ \mathcal{F}\tilde{g}_T(\lambda)\right\rangle$$

On a :

$$\mathcal{F}[\tilde{g}_T](\lambda) = \sum_{q=0}^{N-1}\tilde{C}_q\,\delta_{\frac{q}{T}}$$

D'où :

$$G_j^- = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{C}_q\,\mathcal{F}\Delta\left(\frac{j}{T}-\frac{q}{T}\right)$$

ce qui, compte-tenu de (II-1 ; 10), nous donne :

$$G_j^- = \tilde{C}_j .$$

En résumé :

$$g_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m\,e^{2i\pi\frac{m}{T}t} \xrightarrow{\text{echant.}} g_k = g_T\left(\frac{kT}{N}\right) \xrightarrow{\text{D.F.T.}} G_j^- = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_{sN+j}$$

$$k=0,\dots,N-1 \qquad\qquad j=0,\dots,N-1$$

(II-2 ; 4)

Lorsqu'on "échantillonne" une fonction de période T à raison de N points équidistants par période, si l'on effectue la D.F.T. sur le vecteur obtenu avec N points consécutifs à partir de 0, on recueille pour chaque valeur de l'indice allant de 0 à N-1 la somme des coefficients de Fourier de la fonction ayant le même indice modulo N .
Voir exemple numérique (en annexe).

II-3 - CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION

II-3-1 - Interpolation par un polynôme trigonométrique

Etant donnée une fonction g non périodique connue par ses valeurs aux abscisses $\frac{kT}{N}$ $(k = 0,\dots,N-1)$ la fonction $\tilde{g}_T$ périodique de période T ayant pour coefficients de Fourier :

$$\tilde{C}_j = \bar{G_j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{jk}{N}} g_k \qquad j \in \{0,\dots,N-1\}$$

$$\text{(II-3 ; 1)}$$

$$\tilde{C}_j = 0 \qquad j \notin \{0,\dots,N-1\}$$

est telle que

$$\tilde{g}_T\left(\frac{kT}{N}\right) = \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{C}_q \, e^{2i\pi\frac{qk}{N}}$$

$$\tilde{g}_T\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k \qquad \text{pour } k \in \{0,\dots,N-1\}$$

Les $\tilde{C}_j$ vérifient :

$$\tilde{C}_j = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{g}_T(t)\, e^{-2i\pi\frac{j}{T}t} \, dt \qquad \text{(II-3 ; 2)}$$

La fonction $\tilde{g}$ coïncidant avec $\tilde{g}_T$ sur $[0,T[$ et nulle ailleurs admet pour transformée de Fourier :

$$\mathfrak{F}[\tilde{g}]\,(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(t)\, e^{-2\pi\lambda t} \, dt$$

$$= \int_0^T \tilde{g}_T(t)\, e^{-2i\pi\lambda t} \, dt$$

Lorsque λ prend la valeur $\frac{j}{T}$ $(j = 0,\ldots,N-1)$, compte tenu de (II-3 ; 2) on a :

$$\mathcal{F}[\tilde{g}]\left(\frac{j}{T}\right) = T\tilde{C}_j$$

D'où, en tenant compte de la remarque du paragraphe (II-1 ; 2)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \mathcal{F}[\tilde{g}]\left(\frac{j}{T}\right) = T\,G_j^- \\[2ex] \mathcal{F}[\tilde{g}]\left(\frac{j}{T}\right) = \frac{T}{N}\,G_j^+ \end{array}\right\} & j = 0,\ldots,\frac{N}{2}-1 \\[4ex] \left.\begin{array}{l} \mathcal{F}[\tilde{g}]\left(\frac{j-N}{T}\right) = T\,G_j^- \\[2ex] \mathcal{F}[\tilde{g}]\left(\frac{j-N}{T}\right) = T\,G_j^+ \end{array}\right\} & j = \frac{N}{2},\ldots,N-1 \end{array}} \qquad \text{(II-3 ; 3)}$$

II-3-2 - Interpolation linéaire

Nous avons vu précédemment au paragraphe (II-1 ; 1) que si g était une fonction continue et bornée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, et Δ la distribution

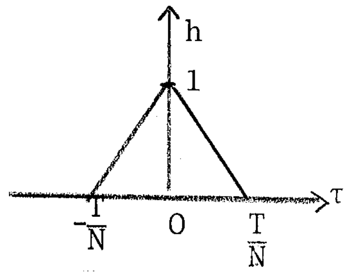
$$\sum_{k=0}^{N-1} \delta_{\frac{kT}{N}}$$

leur produit était la distribution

$$\Delta g = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\, \delta_{\frac{kT}{N}}$$

Soit h la fonction sur R définie comme suit :

$$h(\tau) \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T/N} & \text{si } |\tau| < \frac{T}{N} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



(II-3 ; 4)

Effectuons la convolution de la distribution Δg avec la fonction h . C'est une fonction que nous noterons $\hat{g}$.

$$\hat{g}(t) = [\Delta g * h]\ (t)$$

$$= <\Delta g(\tau),\ h(t-\tau)>$$

$$= <\sum_{k=0}^{N-1} g_k\ \delta_{\frac{kT}{N}}(\tau),\ h(t-\tau)>$$

$$\hat{g}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\ h(t - \frac{kT}{N}) \qquad \text{(II-3 ; 5)}$$

Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}$ et $u \in [0, \frac{T}{N}[$ tels que

$$t = q\frac{T}{N} + u$$

$$\hat{g}(q\frac{T}{N} + u) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\ h(\frac{(q-k)T}{N} + u)$$

Compte-tenu de la définition de h et de l'intervalle de variation de u, $h(\frac{(q-k)T}{N} + u) \neq 0$ entraîne que q-k doit prendre soit la valeur 0, soit la valeur -1.

D'où, en introduisant $g_{-1} = g_N = 0$:

pour $q \in \{-1,\dots,N-1\}$ $\quad \hat{g}(q\frac{T}{N} + u) = g_q\, h(u) + q_{q+1}\, h(-\frac{T}{N} + u)$

$$\hat{g}(q\frac{T}{N} + u) = g_q(1 - u\frac{N}{T}) + g_{q+1}\, u\frac{N}{T} \qquad \text{(II-3 ; 6)}$$

$$u = 0 \Rightarrow \hat{g}(q\frac{T}{N}) = g_q$$

$$u \to \frac{T}{N} \Rightarrow \hat{g}(q\frac{T}{N} + u) \to g_{q+1}$$

pour t tel que $q \notin \{-1,\dots,N-1\}$ $\quad \hat{g}(t) \equiv 0$

La fonction $\hat{g}$ *obtenue par convolution de* Δg *avec* h *est donc la fonction continue, nulle en dehors de* $[-\frac{T}{N}, T[$ *linéaire sur chaque intervalle* $[q\frac{T}{N}, (q+1)\frac{T}{N}]$ *et telle que* $\hat{g}(q\frac{T}{N}) = g_q$.
(voir figure 2).

Cherchons la transformée de Fourier de cette fonction :

$$\mathfrak{F}[\hat{g}] = \mathfrak{F}[\Delta g * h]$$

$$\mathfrak{F}[\hat{g}] = \mathfrak{F}[\Delta g] \cdot \mathfrak{F}[h]$$

Pour la valeur j/T de l'abscisse elle prend la valeur

$$\mathfrak{F}[\hat{g}](\frac{j}{T}) = \mathfrak{F}[\Delta g](\frac{j}{T}) \cdot \mathfrak{F}[h](\frac{j}{T})$$

De même, pour la transformée inverse de Fourier

$$\bar{\mathcal{F}}[\hat{g}](\tfrac{j}{T}) = \bar{\mathcal{F}}[\Delta g](\tfrac{j}{T}) \cdot \bar{\mathcal{F}}[h](\tfrac{j}{T}).$$

On calcule aisément :

$$\mathcal{F}[h](\lambda) = \bar{\mathcal{F}}[h](\lambda) = \frac{T}{N}\left(\frac{\sin \pi\lambda \frac{T}{N}}{\pi\lambda \frac{T}{N}}\right)^2 \qquad \text{(II-3 ; 7)}$$

D'où les valeurs exactes des transformées et transformée inverse de Fourier de la fonction $\hat{g}$ pour les abscisses $\frac{j}{T}$ $(j \in \mathbb{Z})$ à partir de la D.F.T. et de l'I.D.F.T. des échantillons g_k $(k = 0,\dots,N-1)$ de la fonction g

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}[\hat{g}](\tfrac{j}{T}) &= T.\left(\frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}}\right)^2 . G^-_{j_N} \\ \bar{\mathcal{F}}[\hat{g}](\tfrac{j}{T}) &= \frac{T}{N}\left(\frac{\sin \pi \frac{j}{N}}{\pi \frac{j}{N}}\right)^2 . G^+_{j_N} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & j \in \mathbb{Z} \\ & j_N = j\,(\mathrm{mod}N) \in \{0,\dots,N-1\} \end{aligned} \qquad \text{(II-3 ; 8)}$$

II-4 - CAS D'"ECHANTILLONS" PRELEVES ENTRE a ET a+T

II-4-1 - Distribution Δ_a

Posons :

$$\Delta_a = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{a+\frac{kT}{N}} \qquad \text{(II-4 ; 1)}$$

Le produit de cette distribution avec la fonction g est la distribution

$$\Delta_a . g = \sum_{k=0}^{N-1} ga_k \, \delta_{a+\frac{kT}{N}} \qquad \text{(II-4 ; 2)}$$

en posant :

$$ga_k = g(a+ \frac{kT}{N}).$$

La propriété du produit de convolution de 2 distributions de Dirac ($\delta_\alpha * \delta_\beta = \delta_{\alpha+\beta}$) permet d'écrire :

$$\Delta_a . g = \left(\sum_{k=0}^{N-1} ga_k \; \delta_{\frac{kT}{N}} \right) * \delta_a \qquad \text{(II-4 ; 3)}$$

Si l'on note $\vec{Ga}$ la D.F.T. du vecteur $\vec{ga}$, en prenant la transformée de Fourier de (II-4 ; 3) aux abscisses $\frac{j}{T}$ on a :

$$\mathcal{F}[\Delta_a . g](\tfrac{j}{T}) = N \; G\bar{a}_j . \; \mathcal{F}[\delta_a](\tfrac{j}{T})$$

la T.F. de δ_a étant la fonction $e^{-2i\pi af}$

$$\mathcal{F}[\Delta_a . g](\tfrac{j}{T}) = e^{-2i\pi a \frac{j}{T}} . \; N \; G\bar{a}_j$$

$$\text{(II-4 ; 4)}$$

De même

$$\bar{\mathcal{F}}[\Delta_a . g](\tfrac{j}{T}) = e^{2i\pi a \frac{j}{T}} . \; G^+a_j$$

II-4 - 2 - <u>Cas</u> $a = - \frac{T}{2}$

Dans ce cas particulier :

$$\mathcal{F}[\Delta_{-\frac{T}{2}} . g](\tfrac{j}{T}) = (-1)^j \; N \; G^-a_j$$

$$\text{(II-4 ; 5)}$$

$$\bar{\mathcal{F}}[\Delta_{-\frac{T}{2}} . g](\tfrac{j}{T}) = (-1)^j \; G^+a_j$$

Pour calculer la T.F. d'une fonction dont les échantillons sont pris entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$ on calcule la D.F.T. du vecteur de ces échantillons et l'on change de signe les composantes d'indices impair du vecteur résultant. Puis on utilise les approximations du paragraphe (II-3)

Remarque :

si
$$ga_o = \frac{1}{2}\left[g(-\frac{T}{2}) + g(\frac{T}{2})\right]$$

$$ga_k = g(-\frac{T}{2}+\frac{kT}{N}) \qquad k = 1,\dots,N-1$$

celà revient à faire le produit de g par

$$\Delta'_{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}(\delta_{-\frac{T}{2}} + \delta_{\frac{T}{2}}) + \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{-\frac{T}{2}+\frac{kT}{N}} \qquad \text{(II-4 ; 6)}$$

dont la transformée de Fourier est réelle :

$$\mathfrak{F}[\Delta'](\lambda) = \cos\pi T\lambda \left[1+2\,\frac{\sin\pi T\lambda(\frac{1}{2}-\frac{1}{N})}{\sin\pi\, T\lambda\,\frac{1}{N}}\right] \qquad \text{(II-4 ; 7)}$$

CHAPITRE - III

CROSS-SPECTRE ET SPECTRE DE PUISSANCE

III-1 - FONCTION DE CROSS-CORRELATION ET CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS FONCTION D'AUTO-CORRELATION ET SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION

III-1-1 - Définition de la Fonction de Cross-Correlation

a) Soient g_1 et g_2 deux fonctions continues et bornées ($|g_1(t)| \leq M_1$ et $|g_2(t)| \leq M_2$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Leur fonction de cross-correlation est définie par la limite suivante (quand elle existe) :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u)dt \qquad \text{(III-1 ; 1)}$$

On a :

$$|[g_1 \text{ CC } g_2](u)| \leq M_1 . M_2$$

b) Dans la suite nous considèrerons des fonctions à support borné, par exemple $g_1(t) \equiv 0$ et $g_2(t) \equiv 0$ pour tout $t \notin [a,b]$, dont la fonction de cross-correlation telle qu'elle est définie par (III-1 ; 1) est nulle. Dans ce cas nous conviendrons de ne pas faire tendre θ vers l'infini et nous prendrons comme définition de la fonction de cross-correlation de g_1 et g_2 :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u)dt \qquad \text{(III-1 ; 2)}$$

On voit que pour $u \notin [-(b-a),(b-a)]$ on a $[g_1 \text{ CC } g_2](u) \equiv 0$.
On a toujours la majoration :

$$|[g_1 \text{ CC } g_2](u)| \leq M_1.M_2$$

(III-1 ; 2) peut encore s'écrire

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g_1(t)}.g_2(t+u)dt$$

En posant $x = -t$ et $g_1^{\tau}(x) = g_1(-x)$ on obtient

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g_1^{\tau}}(x).g_2(u-x)\, dx \qquad \text{(III-1 ; 3)}$$

Dans le second membre de cette égalité on reconnait un produit de convolution

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \frac{1}{b-a} [g_1^{\tau} * g_2](u) \qquad \text{(III-1 ; 4)}$$

Dans le cas où g_1 et g_2 sont à support borné, leur fonction de cross-correlation est le quotient du produit de convolution de $\overline{g_1^{\tau}}$ avec g_2 par la longueur du support.

Dans les deux cas, la loi de composition n'est pas commutative.
Si g_1 et g_2 sont réelles $[g_2 \text{ CC } g_1](u) = [g_1 \text{ CC } g_2](-u)$

III-1-2 - Définition du cross-spectre de 2 fonctions

C'est la transformée de Fourier de leur fonction de cross-correlation.
On le notera $P_{g_1 g_2}$.

$$P_{g_1 g_2}(f) = \mathcal{F}[g_1 \text{ CC } g_2](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g_1 \text{ CC } g_2](u)e^{-2i\pi fu}\, du \qquad \text{(III-1 ; 5)}$$

III-1-3 - Fonction d'Auto-correlation et Spectre de Puissance

Fonction d'Auto-correlation :

C'est le cas où g_1 et g_2 sont égales ($g_1 = g_2 = g$).

$$[g \text{ CC } g](u) = \lim_{\theta\to\infty} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g(t)}\ g(t+u)dt \qquad \text{(III-1 ; 6)}$$

Si g est à support borné ($g(t) \equiv 0$ si $t \notin [a,b]$)

$$[g \text{ CC } g](u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{g(t)} \cdot g(t+u)dt \qquad \text{(III-1 ; 7)}$$

$$g \text{ CC } g = \frac{1}{b-a} \overline{g^{\tau}} * g$$

Spectre de puissance : C'est la transformée de Fourier de la fonction d'Auto-correlation

$$P_g(f) = \mathfrak{F}[g \text{ CC } g](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g \text{ CC } g](u)\ e^{-2i\pi fu} du \qquad \text{(III-1 ; 8)}$$

III-2 - CAS DES FONCTIONS SEMI-PERIODIQUES

III-2-1 - Définition et propriétés

Une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera dite semi-périodique si elle admet un développement de la forme

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\ e^{2i\pi f_m t} \qquad \text{(III-2 ; 1)}$$

avec

$$f_m \in \mathbb{R} \qquad c_m \in \mathbb{C} \qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m| < +\infty$$

C'est une forme particulière des fonctions presque périodiques.

La répartition des fréquences f_m sur $\mathbb{R}$ peut être absolument quelconque, simplement $m \neq q \Rightarrow f_m \neq f_q$. (Si il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout m on puisse trouver $q \in \mathbb{Z}$ tel que $f_m = \frac{q}{T}$ alors le développement (III-2 ; 1) se ramène à un développement en série de Fourier et g est périodique de période T).

La transformée de Fourier d'une fonction semi-périodique g admettant le développement (III-2 ; 1) est la distribution

$$\mathfrak{F}[g] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \, \delta_{f_m} \tag{III-2 ; 2}$$

Ce qui nous permet d'énoncer qu'une fonction semi-périodique n'est pas sommable ($g \notin L^1$) car la transformée de Fourier d'une fonction sommable est une fonction continue (cf. SCHWARTZ [1] p. 200).

III-2-2 - Fonction de Cross-correlation et cross-spectre

Soient g_1 et g_2 deux fonctions semi-périodiques :

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} co_m^1 \, e^{2i\pi f_m^1 t} \quad f_m^1 \in \mathbb{R} \quad co_m^1 \in \mathbb{C} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |co_m^1| < +\infty \\ g_2(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} co_m^2 \, e^{2i\pi f_m^2 t} \quad f_m^2 \in \mathbb{R} \quad co_m^2 \in \mathbb{C} \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |co_m^2| < +\infty \end{aligned} \tag{III-2 ; 3}$$

Effectuons l'union des suites f_m^1 et f_m^2

$$\{f_\ell\} = \{f_m^1\} \cup \{f_m^2\}$$

et posons

$$c_q^1 = \begin{cases} \text{si } \exists m \mid f_m^1 = f_q \text{ alors } co_m^1 \\ \text{sinon } 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q^1| < +\infty$$

$$c_q^2 = \begin{cases} \text{si } \exists m \mid f_m^2 = f_q \text{ alors } co_m^2 \\ \text{sinon } 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q^2| < +\infty$$

ce qui permet d'écrire :

$$g_1(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^1 \, e^{2i\pi f_q t}$$

$$g_2(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 \, e^{2i\pi f_q t} \qquad \text{(III-2 ; 4)}$$

Pour calculer la fonction de cross-correlation de g_1 et g_2 nous utiliserons la définition (III-1 ; 1) puisque g_1 et g_2 ne sont pas à support borné.

Introduisons la fonction $g_1 \underset{\theta}{CC} g_2$ dont la limite pour $\theta \to \infty$ nous donnera g_1 CC g_2

$$[g_1 \underset{\theta}{CC} g_2](u) = \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \overline{g_1(t)} \cdot g_2(t+u)dt$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{c_m^1} \, e^{-2i\pi f_m t} \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 \, e^{2i\pi f_q (t+u)} \right) dt$$

que l'on peut écrire, compte tenu de la convergence des séries des modules de c_m^1 et c_m^2

$$\left[g_1 \underset{\theta}{CC} g_2\right](u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{c_m^1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q^2 \, e^{2i\pi f_q u} \frac{1}{\theta} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} e^{2i\pi(f_q - f_m)t} \, dt$$

$$\left[g_1 \underset{\theta}{CC} g_2\right](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \Big[\overline{c_q^1} c_q^2 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq q}}^{+\infty} \overline{c_m^1} c_q^2 \frac{\sin\pi(f_q - f_m)\theta}{\pi(f_q - f_m)\theta} \Big] e^{2i\pi f_q u} \qquad \text{(III-2 ; 5)}$$

Lorsque $\theta \to \infty$, $g_1 \underset{\theta}{CC} g_2 \to g_1 \, CC \, g_2$

$$\boxed{\left[g_1 \, CC \, g_2\right](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 \; e^{2i\pi f_q u}} \qquad \text{(III-2 ; 6)}$$

La fonction de cross-correlation de deux fonctions semi-périodiques est aussi semi-périodique. Sa transformée de Fourier nous fournit le cross-spectre de g_1 et g_2 qui est donc la distribution

$$\boxed{P_{g_1 g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1} c_q^2 \, \delta_{f_q}} \qquad \text{(III-2 ; 7)}$$

Une autre écriture peut être employée faisant apparaître le module du coefficient de chaque fréquence et la phase qui est associée à cette fréquence :

Nous avons vu que $c_q^1 \in \mathbb{C}$ et $c_q^2 \in \mathbb{C}$.

Posons $c_q^1 = r_q^1 \, e^{-i\varphi_q^1}$ avec $r_q^1 \in \mathbb{R}$, $\varphi_q^1 \in [0,2\pi[$

$c_q^2 = r_q^2 \, e^{-i\varphi_q^2}$ avec $r_q^2 \in \mathbb{R}$, $\varphi_q^2 \in [0,2\pi[$

Les expressions de g_1 et g_2 deviennent :

$$g_1(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 \, e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q^1)}$$

$$g_2(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^2 \, e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q^2)} \qquad \text{(III-2 ; 8)}$$

La fonction de cross-correlation s'écrit alors :

$$\boxed{[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 \, r_q^2 \, e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \, e^{2i\pi f_q u}} \qquad \text{(III-2 ; 9)}$$

et le cross-spectre :

$$\boxed{P_{g_1 g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 \, r_q^2 \, e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \, \delta_{f_q}} \qquad \text{(III-2 ; 10)}$$

En désignant par I_1 et I_2 les ensembles d'indices tels que

$$I_1 = \{q \in \mathbb{Z} \mid c_q^1 \neq 0\}$$

$$I_2 = \{q \in \mathbb{Z} \mid c_q^2 \neq 0\}$$

on obtient :

$$[g_1 \text{ CC } g_2](u) = \sum_{q \in I_1 \cap I_2} r_q^1 \, r_q^2 \, e^{i[2\pi f_q u - (\varphi_q^2 - \varphi_q^1)]}. \qquad \text{(III-2 ; 11)}$$

et

$$P_{g_1 g_2} = \sum_{q \in I_1 \cap I_2} r_q^1 \, r_q^2 \, e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \, \delta_{f_q}$$

La fonction de cross-correlation de deux fonctions semi-périodiques ne "recueille" que les fréquences communes aux deux signaux. Le module du coefficient de chaque fréquence est égal au produit des modules des coefficients de chacune des fonctions pour la même fréquence, la phase attachée à cette fréquence étant la différence entre la phase de la 2ème fonction et celle de la 1ère.

La fonction de cross-correlation de deux fonctions n'ayant pas de fréquence commune est la fonction nulle.

Le cross-spectre de deux fonctions semi-périodiques est une distribution de masses de Dirac complexes sur $\mathbb{R}$.

III-2-3 - Fonction d'Auto-correlation et Spectre de puissance

$$g_1 = g_2 = g \qquad g(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_q \, e^{2i\pi f_q t} \qquad c_q \in \mathbb{C}$$

ou

$$g(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q \, e^{i(2\pi f_q t - \varphi_q)} \qquad r_q \in \mathbb{R}$$

Les formules (III-2 ; 6) et (III-2 ; 9) deviennent :

$$\boxed{[g \ CC \ g](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q|^2 \, e^{2i\pi f_q u} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (r_q)^2 \, e^{2i\pi f_q u}} \qquad \text{(III-2 ; 12)}$$

La fonction d'auto-correlation d'une fonction semi-périodique a tous ses coefficients réels et positifs. (Les déphasages φ_q ont disparu). Ce qùi entraîne que, quel que soit u :

$$|[g \ CC \ g](u)| \leq |[g \ CC \ g](0)| \qquad \text{(III-2 ; 13)}$$

Pour le spectre de puissance de g , (III-2 ; 7) et (III-2 ; 10) se transforment en

$$\boxed{P_g = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_q|^2 \, \delta_{f_q} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} (r_q)^2 \delta_{f_q}} \qquad \text{(III-2 ; 14)}$$

Le spectre de puissance d'une fonction semi-périodique g est une distribution de masses de Dirac réelles placées aux abscisses f_q et proprotionnelles au carré du module du coefficient correspondant.

III-2-4 - Fonctions réelles

Nous supposons $f_o = 0$

$$q < 0 \Rightarrow f_q < 0$$

$$q > 0 \Rightarrow f_q > 0$$

Si g_1 et g_2 sont réelles, on a alors

$$c_o^1 = r_o^1 \in \mathbb{R} \qquad\qquad c_o^2 = r_o^2 \in \mathbb{R}$$

et quelque soit q : $\quad f_{-q} = -f_q$

$$c_{-q}^1 = \overline{c_q^1} \qquad\qquad c_{-q}^2 = \overline{c_q^2} \qquad \text{(III-2 ; 14)}$$

Si, comme on l'a vu

$$c_q^1 = r_q^1 \, e^{-i\varphi_q^1} \qquad\qquad c_q^2 = r_q^2 \, e^{-i\varphi_q^2}$$

cela entraîne

$$c_{-q}^1 = r_q^1 \, e^{i\varphi_q^1} \qquad\qquad c_{-q}^2 = r_q^2 \, e^{i\varphi_q^2}$$

g_1 et g_2 s'écrivent alors :

$$g_1(t) = r_o^1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 \cos(2\pi f_q t - \varphi_q^1)$$
$$g_2(t) = r_o^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^2 \cos(2\pi f_q t - \varphi_q^2) \quad \text{(III-2 ; 16)}$$

Fonction de cross-correlation

$$\boxed{[g_1 \text{ CC } g_2](u) = r_o^1 r_o^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 r_q^2 \cos(2\pi f_q t - (\varphi_q^2 - \varphi_q^1))} \quad \text{(III-2 ; 17)}$$

=> si g_1 et g_2 sont réelles, leur fonction de cross-correlation l'est aussi.

Cross-spectre

$$\boxed{P_{g_1 g_2} = r_o^1 r_o^2 \delta + \sum_{q=1}^{\infty} r_q^1 r_q^2 \left[e^{-i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{f_q} + e^{i(\varphi_q^2 - \varphi_q^1)} \delta_{-f_q}\right]} \quad \text{(III-2 ; 18)}$$

Le Cross-spectre reste une distribution de masses de Dirac complexes.

Fonction d'Auto-correlation

$$\boxed{[g \text{ CC } g](u) = (r_o)^2 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} (r_q)^2 \cos 2\pi f_q t} \quad \text{(III-2 ; 19)}$$

Fonction réelle paire ; quelque soit u, $|[g \text{ CC } g](u)| \leq [g \text{ CC } g](0)$.

Spectre de puissance

$$\boxed{P_g = (r_o)^2\delta + \sum_{q=1}^{\infty} (r_q)^2 [\delta_{f_q} + \delta_{-f_q}]} \qquad \text{(III-2 ; 20)}$$

Distribution de masses de Dirac réelles symétriques autour de l'origine.

CHAPITRE - IV

CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION A PARTIR DES D.F.T. DE LEURS ECHANTILLONS

Au chapitre II nous avons vu comment, partant d'une fonction g échantillonnée aux instants $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\ldots,N-1)$, calculer la D.F.T. du vecteur $\vec{g}$ de composantes $g_k = g(k\frac{T}{N})$ revenait à calculer la Transformée de Fourier de la distribution $\frac{1}{N}$ Δg pour les fréquences $\frac{j}{T}$ $(j = 0,\ldots,N-1)$.

Sachant calculer la D.F.T. de façon avantageuse grâce à l'algorithme de Cooley & Tukey, nous allons voir comment l'on peut conserver le bénéfice de cet algorithme dans le calcul approché du cross-spectre et du spectre de puissance.

IV-1 - DISTRIBUTION DE CROSS-CORRELATION DES DEUX DISTRIBUTIONS Δg_1 et Δg_2

SCHWARTZ ([1] p. 130) a montré que le produit de convolution de deux distributions de Dirac est une distribution de Dirac et que

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \qquad \text{(IV-1 ; 1)}$$

Par analogie avec la propriété (III-1 ; 4) du produit de cross-correlation de deux fonctions à support borné, nous définirons le produit de cross-correlation des deux distributions Δg_1 et Δg_2 comme étant la distribution

$$\boxed{\Delta g_1 \ \mathrm{CC}\ \Delta g_2 = \frac{1}{N}\ \overline{(\Delta g_1)^{\tau}} \ast\ g_2} \qquad \text{(IV-1 ; 2)}$$

où

$$\Delta g_1 = \sum_{k=0}^{N-1} g_k^1 \ \delta_{k\frac{T}{N}} \quad \Rightarrow \quad \overline{(\Delta g_1)^{\tau}} = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1_k}} \ \delta_{-k\frac{T}{N}}$$

et

$$\Delta g_2 = \sum_{q=0}^{N-1} g_{2_q} \ \delta_{q\frac{T}{N}}$$

ce qui entraîne, d'après (IV-1 ; 1) :

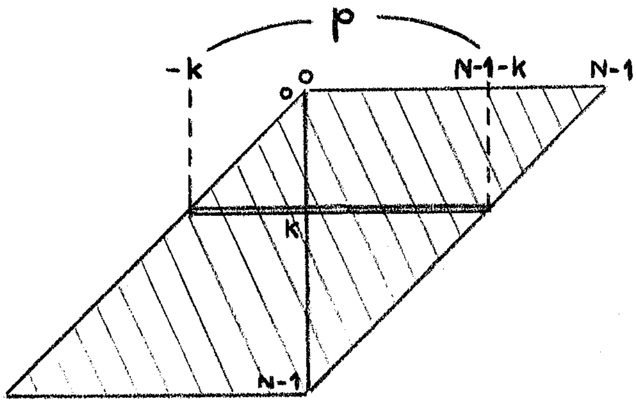
$$\Delta g_1 \ \mathrm{CC}\ \Delta g_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1_k}} \sum_{q=0}^{N-1} g_{2_q} \ \delta_{(q-k)\frac{T}{N}}$$

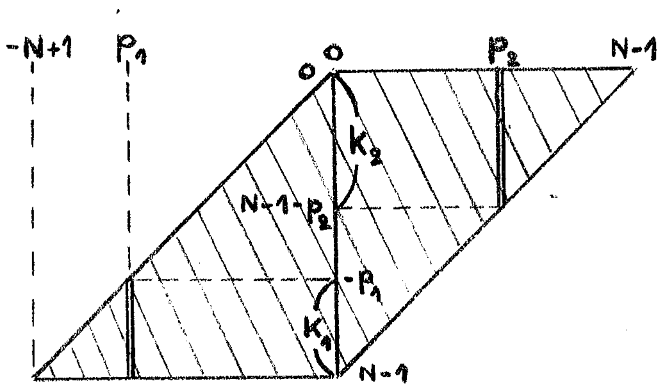
En effectuant le changement de variable

$$p = q-k \Rightarrow q = p+k$$

p balayera les indices entiers de -N+1 à N-1

$$\Delta g_1 \ \mathrm{CC}\ \Delta g_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{p=-k}^{N-1-k} \overline{g_{1_k}} \ g_{2_{k+p}} \ \delta_{p\frac{T}{N}}$$





$$\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \frac{1}{N} \Big[\sum_{p=-N+1}^{-1} \Big(\sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1_k}}\, g_{2_{k+p}} \Big) \delta_{p\frac{T}{N}}$$

$$+ \sum_{p=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1_k}}\, g_{2_{k+p}} \Big) \delta_{p\frac{T}{N}} \Big]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2 = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p\, \delta_{p\frac{T}{N}} \\ &\text{avec } \varphi_p = \begin{cases} \text{si } -N+1 \le p < 0 : \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1_k}}\, g_{2_{k+p}} \\ \\ \text{si } 0 \le p \le N-1 : \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1_k}}\, g_{2_{k+p}} \end{cases} \end{aligned}} \qquad \text{(IV-1 ; 3)}$$

La cross-correlation de deux distributions de masses de Dirac aux abscisses $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\dots,N-1)$ fait donc apparaître des masses de Dirac aux abscisses $p\frac{T}{N}$ $(p = -N+1,\dots,N-1)$, chaque poids à l'abscisse $p\frac{T}{N}$ étant formé de la somme de $N-|p|$ produits de poids de la première distribution par des poids de la seconde.

IV-2 - CROSS-SPECTRE DE DEUX DISTRIBUTIONS

C'est par définition, la transformée de Fourier de la distribution de cross-correlation.

C'est une fonction de la fréquence f :

$$\mathfrak{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2](f) = \Big\langle \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p\, \delta_{p\frac{T}{N}}(t),\ e^{-2i\pi ft} \Big\rangle$$

$$\boxed{\mathfrak{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2](f) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \, e^{-2i\pi f p \frac{T}{N}}} \qquad \text{(IV-2 ; 1)}$$

Pour $f = \frac{j}{T}$ on obtient :

$$\mathfrak{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2](\tfrac{j}{T}) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p \, e^{-2i\pi \frac{jp}{N}}$$

$$= \varphi_o + \sum_{p=1}^{N-1} [\varphi_{p-N} \, e^{-2i\pi \frac{j(p-N)}{N}} + \varphi_p \, e^{-2i\pi \frac{jp}{N}}]$$

$$= \varphi_o + \sum_{p=1}^{N-1} (\varphi_{p-N}+\varphi_p) \, e^{-2i\pi \frac{jp}{N}}$$

En posant $\varphi'_o = \varphi_o$ et, pour $p \in \{1,\dots,N-1\}$: $\varphi'_p = \varphi_{p-N}+\varphi_p$
on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2](\tfrac{j}{T}) = \displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} \varphi'_p \, e^{-2i\pi \frac{jp}{N}} \\ \text{avec} \\ \varphi'_p = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \overline{g_{1_k}} \; g_{2_{k+p \,(\mathrm{mod}\ N)}} \end{array}} \qquad \text{(IV-2 ; 2)}$$

Calculer la Transformée de Fourier de Δg_1 CC Δg_2 pour les fréquences $\frac{j}{T}$ ($j = 0,\dots,N-1$) revient donc à calculer la D.F.T. du vecteur $N\vec{\varphi}'$.