

Transformée de Fourier Discrète

André Eberhard *

V2 - Avril 2012

Table des matières

1	Préambule	4
2	Définitions et notations	5
2.1	La Transformée de Fourier Discrète <i>TFD</i> : la matrice S	5
2.2	La Transformée de Fourier Discrète Inverse <i>TFDI</i>	5
2.3	Relations entre S et S^{-1}	5
2.4	Remarque importante sur les notations	6
2.5	Normes euclidiennes de G et de g	6
3	Carrés des matrices S et S^{-1}	7
3.1	Matrice de permutation	7
3.2	Carré des matrices S et S^{-1}	7
4	Echantillonnage d'un signal	8
4.1	Périodicité des G_j	8
4.2	Une interprétation de la <i>TFD</i>	8
4.3	Les règles de l'échantillonnage	10
4.4	Echantillonnage d'un signal pair ou impair	10
4.4.1	Echantillonnage d'un signal pair : vecteur Pair	10
4.4.2	Echantillonnage d'un signal impair : vecteur Impair	11
4.4.3	Vecteur quelconque = vecteur Pair + vecteur Impair	11
4.5	Echantillonnage d'un signal réel	12
4.5.1	Cas d'un vecteur Pair réel	12
4.5.2	Cas d'un vecteur Impair réel	12
4.5.3	Cas d'un vecteur quelconque réel	12

* *eberhard_andre* {chez} *orange* {point} *fr*

4.5.4	Tableau récapitulatif	13
4.5.5	<i>TFD</i> simultanée de deux vecteurs réels	13
5	Polynômes Trigonométriques	14
5.1	Définition	14
5.2	Interpolation Trigonométrique	14
5.2.1	Polynôme Trigonométrique associé à G	14
5.2.2	Interpolation <i>continue</i>	14
5.2.3	Interpolation <i>discrète</i>	15
6	Produit de Convolution périodique de deux vecteurs	17
6.1	Les matrices circulantes	17
6.1.1	La matrice de permutation circulaire \mathbf{P} et ses puissances	17
6.1.2	Le produit \mathbf{SP}	17
6.1.3	Matrice circulante \mathcal{C}_h associée à un vecteur h	18
6.1.4	Le produit $\mathcal{S}\mathcal{C}_h\mathcal{S}^{-1}$	18
6.1.5	Inverse d'une matrice circulante	19
6.2	Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs	19
6.2.1	Définition	19
6.2.2	<i>TFD</i> du Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs	19
6.2.3	<i>TFD</i> du Produit Direct de deux vecteurs	20
6.2.4	Élément neutre du Produit de Convolution Périodique	20
6.2.5	Produit de deux matrices circulantes	20
6.3	<i>TFD</i> et différences divisées	21
6.3.1	<i>TFD</i> de la différence divisée de g	21
6.3.2	<i>TFD</i> de la différence divisée centrée de g	21
7	Filtrage Discret	22
7.1	Filtre idéal absolu	22
7.1.1	Exemple 1 : Filtre <i>Passe-bas</i>	23
7.1.2	Exemple 2 : Filtre <i>Passe-haut</i>	23
7.2	Remarque sur les filtres absolus	23
7.3	Filtrage par convolution "à portée limitée" dans le domaine des temps (FCPL)	24
7.3.1	Un exemple intuitif de FCPL : le lissage par moyenne glissée	24
7.3.2	Généralisation du FCPL	25
7.3.3	Polygone Trigonométrique associé à la Réponse Impulsionnelle d'un FCPL	26
7.3.4	Meilleure approximation par FCPL d'un filtre idéal absolu	26
7.4	Utilisation du FCPL "au fil de l'eau"	27
7.4.1	Exemple : Meilleure approximation d'un filtre <i>Passe-bas</i> idéal	27

7.4.2	Réponse Impulsionnelle et Fonction de Transfert du lissage par moyenne glissée	28
7.5	Comment construire trois nouveaux filtres à partir d'un seul	29
7.5.1	Filtre 1 (Passe-bas)	29
7.5.2	Filtre 2 (Passe-haut)	29
7.5.3	Filtre 3 (Passe-haut)	29
7.5.4	Filtre 4 (Passe-bas)	30
8	Spectre de Puissance Discret	31
8.1	AC [g] : Vecteur d'auto-corrélation périodique de g	31
8.2	Spec [g] : Spectre de Puissance Discret de g	31
8.3	Puissance totale et normes euclidiennes de G et de g	32
8.4	Puissance et Variance d'un signal réel	32
8.5	Spectre de Module et Spectre de Phase	32
8.6	Exemple de Spectres d'un signal réel	33
9	Parallélismes	34
9.1	Définitions	34
9.2	Dérivation	34
9.3	Produit de Convolution	34
10	Démonstrations	35
10.1	Rappel : série géométrique	35
10.2	Normes euclidiennes de g et de G	35
10.3	Carré de la matrice S	36
10.4	Périodicité des G_j	36
10.5	Conservation du caractère Pair / Impair	36
10.6	Echantillonnage d'un signal réel	37
10.7	<i>TFD</i> simultanée de deux vecteurs réels	37
10.8	Le Polynôme Trigonométrique \tilde{p}_G interpole les g_k	38
10.9	Le produit SP	39
10.10	Commutativité du Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs	39
10.11	<i>TFD</i> du Produit Direct de deux vecteurs	39
10.12	Produit de deux matrices circulantes	40
10.13	<i>TFD</i> de la différence divisée de g	40
10.14	<i>TFD</i> de la différence divisée centrée de g	41
10.15	Réponse Impulsionnelle d'un filtre <i>Passe-bas</i> idéal	41
10.16	Fonction de Transfert du lissage par moyenne glissée	42
10.17	Spectre de Puissance Discret de g	42
10.18	Puissance Totale et Variance	43

1 Préambule

La Transformée de Fourier (pour un signal quelconque) et les Séries de Fourier (pour un signal périodique) ont longtemps été les outils essentiels de l'Analyse Harmonique. Une propriété fondamentale explique cette utilisation :

Le produit de convolution est transformé en produit direct et réciproquement

Même si le mot *signal* peut désigner n'importe quelle fonction définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} , nous l'employons le plus souvent ici pour nommer une grandeur *réelle* variant en fonction du *temps*, l'analyse de Fourier donnant des informations sur son contenu en *fréquence*.

L'apparition des ordinateurs a entraîné la nécessité d'échantillonner les signaux pour les traiter numériquement, et l'utilisation d'une Transformée de Fourier Discrète ou *TFD* (en anglais Discret Fourier Transform ou *DFT*) s'est répandue.

En 1965, Cooley J.W. et Tukey J.W. [1] proposent un algorithme connu sous le nom de *FFT* (Fast Fourier Transform, Transformation de Fourier Rapide) afin de minimiser le temps nécessaire pour effectuer cette opération. Cette date marque une très forte accélération dans le développement du traitement du signal sur ordinateur. Il s'en est d'ailleurs suivi une confusion entre *FFT* et Transformée de Fourier Discrète. Rappelons que la *FFT* n'est qu'un moyen (très efficace) d'effectuer une *TFD*.

Cependant, pour l'essentiel, les raisonnements continuent à se faire en utilisant les propriétés du *continu*, le passage au *discret* ne s'effectuant qu'au moment des calculs, avec retour immédiat au *continu* pour l'exploitation des résultats.

Le document présent développe la théorie de la Transformée de Fourier Discrète en tant que telle, et montre que les principales propriétés du continu ont leurs équivalents en discret.

2 Définitions et notations

2.1 La Transformée de Fourier Discrète *TFD* : la matrice S

La Transformée de Fourier Discrète (*TFD*) est une application linéaire de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C}^N définie par la matrice S de terme général

$$S_{jk} = \frac{1}{N} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} \quad \left| \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, N-1 \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \right. \quad (1)$$

En l'appliquant à un vecteur g on obtient le vecteur G ¹

$$G_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

On a $G = Sg$ et l'on note $G = TFD(g)$.

2.2 La Transformée de Fourier Discrète Inverse *TFDI*

La matrice S est inversible. La matrice S^{-1} de la Transformée de Fourier Discrète Inverse (*TFDI*), a pour terme général

$$S_{jk}^{-1} = e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} \quad \left| \begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, N-1 \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{array} \right. \quad (3)$$

et les composantes du vecteur g s'expriment en fonction de celles de G par :

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} G_j \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

On a donc $g = S^{-1}G$ et l'on note $g = TFDI(G)$.

2.3 Relations entre S et S^{-1}

De (1) et (3) on conclut immédiatement que

$$S = \frac{1}{N} \overline{S^{-1}} \quad \iff \quad S^{-1} = N \overline{S} \quad (5)$$

1. Les vecteurs sont toujours des vecteurs *colonne*. On utilisera toujours la même lettre, en minuscule pour le vecteur de l'espace de départ, et en majuscule pour son transformé par *TFD*.

2.4 Remarque importante sur les notations

Dans leur article original [1], Cooley et Tukey nous demandent de *Considérer le problème du calcul de la série de Fourier complexe*

$$(1) \quad X(j) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot W^{jk} \quad j = 0, 1, \dots, N - 1$$

où les coefficients de Fourier $A(k)$ donnés sont complexes et où W est la racine $N^{\text{ème}}$ principale de l'unité

$$(2) \quad W = e^{2\pi i/N}$$

À l'évidence, il s'agit là d'une Transformation de Fourier Discrète Inverse : passage de l'espace *fréquence* (coefficients de Fourier $A(k)$) à l'espace *temps* (valeurs discrètes $X(j)$). C'est cette convention qui est observée dans ce document :

	Coefficient	Signe de l'exposant
<i>TFD</i>	$1/N$	-
<i>TFDI</i>	1	+

Avec cette convention, si les g_k sont les échantillons d'une fonction périodique, les G_j sont en relation directe avec les coefficients de la Série de Fourier de la fonction. Ainsi, la première composante G_0 est la moyenne des composantes du vecteur g :

$$G_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k$$

D'autres auteurs utilisent le même coefficient $1/\sqrt{N}$ pour *TFD* et *TFDI*, les deux opérations ne se distinguant que par le signe de l'exposant de e .

D'autres encore échangent les coefficients, utilisant 1 pour la *TFD* et $1/N$ pour la *TFDI*. C'est notamment le cas du logiciel Matlab².

2.5 Normes euclidiennes de G et de g

En prenant le carré de la norme euclidienne de G , on montre que [Démon. §10.2]³

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{N} \|g\|_2^2 \quad \iff \quad \|G\|_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \|g\|_2 \quad (6)$$

C'est l'équivalent dans le domaine discret du Théorème de Parseval.

2. Dans l'environnement Matlab, pour exécuter une *TFD* conforme à la définition (2) [page 5], on écrira $G = \text{fft}(g)/N$; (attention aux composantes numérotées de 1 à N).

3. Toutes les démonstrations sont regroupées dans le §10 en fin de document.

3 Carrés des matrices S et S^{-1}

3.1 Matrice de permutation

Rappelons qu'une matrice de permutation est une matrice carrée présentant

- un 1 et un seul par ligne,
- un 1 et un seul par colonne,
- tous les autres éléments étant nuls.

3.2 Carré des matrices S et S^{-1}

Le carré de la matrice S est égal [Dém. §10.3] au produit de la constante $\frac{1}{N}$ par la matrice de permutation notée \mathbf{R} :

$$S^2 = \frac{1}{N}\mathbf{R} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} = \begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 \\ & & & & \cdot \\ & & & 1 & \\ & & \cdot & & \\ & 1 & & & \end{array} \quad (7)$$

\mathbf{R} pour Renversement : appliquée à un vecteur, cette matrice laisse inchangée la première composante, et renverse l'ordre de toutes les autres.

\mathbf{R} étant une matrice de permutation symétrique, on a $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$, et donc

$$S^{-2} = N\mathbf{R} \quad (8)$$

4 Echantillonnage d'un signal

Pour alléger l'exposé, et sans perte de généralité, on suppose que N est pair. •⁴

4.1 Périodicité des G_j

En effectuant une *TFD*, on obtient les composantes de G pour des indices j allant de 0 à $N-1$. Un rapide calcul [Démon. §10.4] montre que si l'on s'intéresse au résultat obtenu pour n'importe quel autre entier

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad G_{j+pN} = G_j \quad (9)$$

Il est donc inutile de calculer les composantes de G pour des indices autres que N valeurs consécutives. Idem avec les composantes de g pour une *TFDI*.

Cette périodicité est **fondamentale** dans le domaine discret : chaque opérateur que nous introduisons en le qualifiant de *Périodique* agit sur les composantes des vecteurs via leur indice *modulo* N .

4.2 Une interprétation de la *TFD*

Jusqu'ici, la *TFD* a été présentée comme une opération sans dimension. Supposons maintenant que les composantes du vecteur g proviennent de l'échantillonnage d'un signal du temps, $s(t)$, pour N abscisses équidistantes entre 0 et T (voir Figure 1) : chaque g_k est vu comme le "représentant" du signal sur l'intervalle de longueur $\frac{T}{N}$ qui le suit.

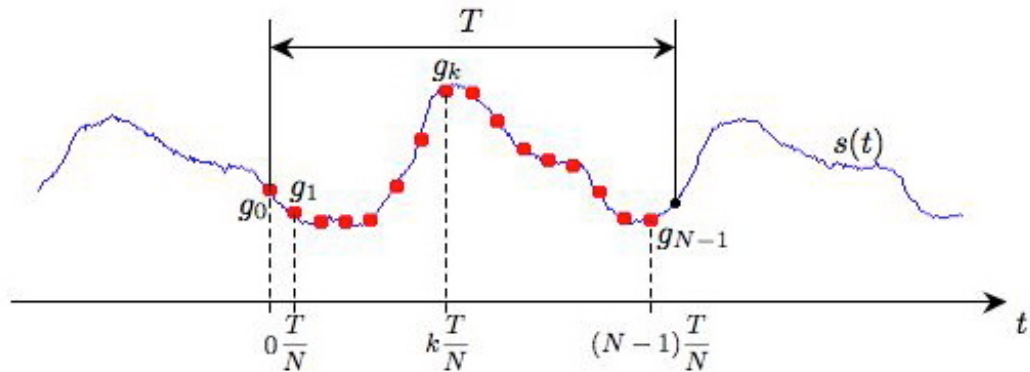


Figure 1 – Échantillons $g_k = s(\frac{kT}{N})$

4. Rappelons que l'algorithme *FFT* de Cooley et Tukey a une efficacité maximum quand N est une puissance de 2.

La formule définissant $G=TFD(g)$ [voir (2) page 5] peut être ré-écrite de la façon suivante en introduisant T au numérateur et au dénominateur de l'exposant complexe :

$$G_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{j}{T} \frac{kT}{N}} g_k \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

Chaque g_k étant associé à l'instant $\frac{kT}{N}$, on voit ici que chaque G_j est associé à $\frac{j}{T}$, soit à la *fréquence* correspondant à j évènements sur l'intervalle T .

La périodicité des G_j observée au §4.1 implique que les valeurs obtenues pour $j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$ sont celles que l'on aurait obtenues pour $j = -\frac{N}{2}, \dots, -1$ qui correspondent à des fréquences négatives mais inférieures en valeur absolue $-\frac{N}{2T}$ à $-\frac{1}{T}$. On opère donc une *Translation négative* de ces composantes G_j . De cette manière, les fréquences associées aux G_j se répartissent dans l'intervalle $[-\frac{N}{2T}, +\frac{N}{2T}[$.

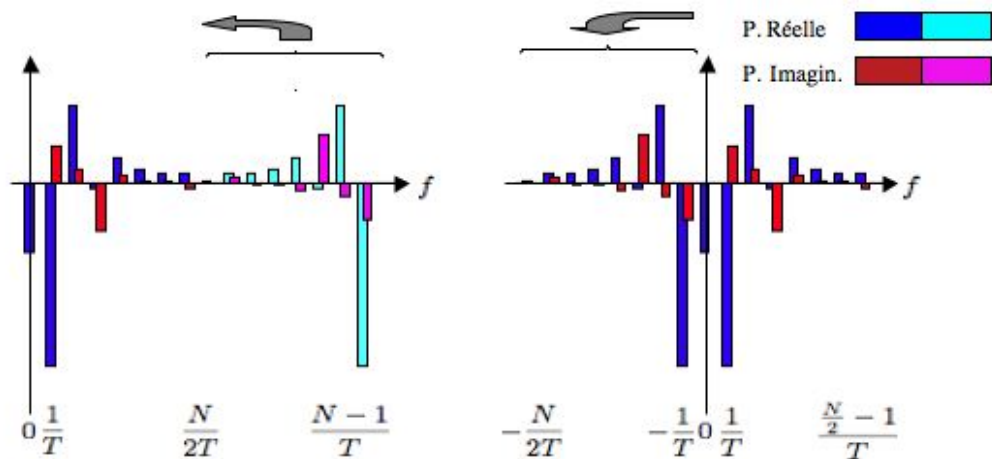


Figure 2 – *Translation négative* des G_j pour $j = \frac{N}{2}, \dots, N-1$

La fréquence d'échantillonnage étant égale à $f_e = \frac{N}{T}$, on constate que les G_j calculés sont associés à N fréquences équiréparties sur l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_e}{2}[$. Ce résultat indique que si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à la *Fréquence de Nyquist* de $s(t)$, double de la plus grande fréquence en valeur absolue présente dans le signal, c'est à dire si $f_e > 2F_{max}$, alors toutes les fréquences présentes dans $s(t)$ sont situées à l'intérieur de l'intervalle couvert par les G_j . C'est une manifestation du théorème de Shannon.

4.3 Les règles de l'échantillonnage

En fixant la **durée** T de l'intervalle d'analyse dans l'espace *temps*, on impose le **pas** dans l'espace *fréquence* qui est l'inverse de cette durée : $\Delta f = \frac{1}{T}$.

De la même manière, en fixant le **pas** $\Delta t = \frac{T}{N}$ dans l'espace *temps*, on impose que l'intervalle d'analyse dans l'espace *fréquence* $[-\frac{N}{2T}, +\frac{N}{2T}[$ ait une **durée** $\frac{N}{T}$ inverse de ce pas.

Espace <i>Temps</i>	Intervalle d'analyse $[0, T[$ (Durée T)	Pas $\Delta t = \frac{T}{N}$	(Fréq. d'échant.) $(f_e = \frac{N}{T})$
Espace <i>Fréquence</i>	Pas $\Delta f = \frac{1}{T}$	Intervalle d'analyse (Durée $\frac{N}{T}$) $[-\frac{N}{2T}, +\frac{N}{2T}[= [-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_e}{2}[$	

Ces règles impliquent que, dans la situation où l'on souhaiterait améliorer la résolution de l'analyse en fréquence en diminuant son pas, c'est paradoxalement la durée d'analyse du signal qu'il faut (dans la mesure où cela est possible) augmenter, et non la fréquence d'échantillonnage.

4.4 Echantillonnage d'un signal pair ou impair

Dans le cas où le signal $s(t)$ est pair ou impair, opérons de la façon suivante pour construire le vecteur g :

$$g_k = \begin{cases} s(\frac{kT}{N}) & \text{pour } k = 0, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ s(\frac{kT}{N} - T) & \text{pour } k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (10)$$

On a opéré une *Translation positive* des échantillons associés aux valeurs négatives de t (voir Figure 3 page 11).

4.4.1 Echantillonnage d'un signal pair : vecteur Pair

Si le signal $s(t)$ est pair, le vecteur g construit après *Translation positive* (10) reste inchangé quand on le multiplie par la matrice de renversement \mathbf{R} définie (7) au §3.2 : $\mathbf{R}g = g$. Un tel vecteur sera qualifié de **Pair**.

Ce caractère se conserve [Démon. §10.5] pour $G = TFD(g)$

$$\mathbf{R}g = g, \quad G = Sg \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}G = G \quad (11)$$

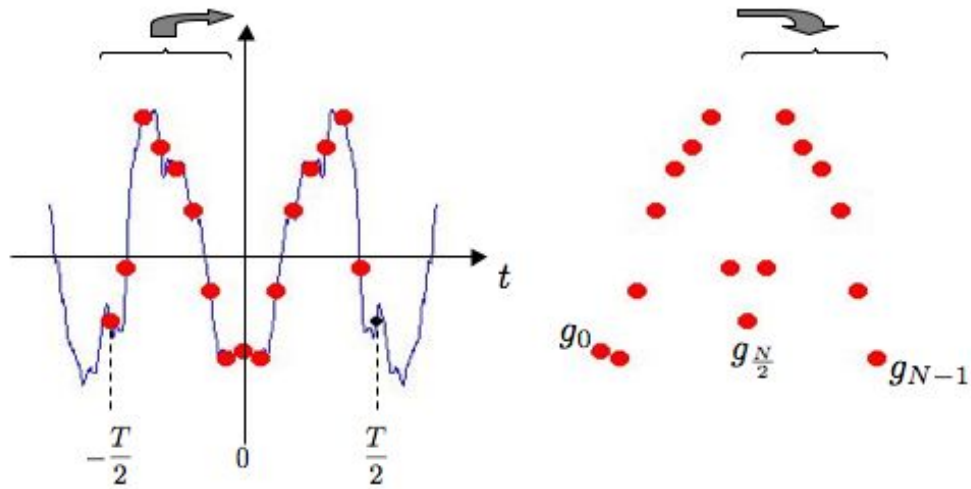


Figure 3 – *Translation positive* des échantillons g_k d'un signal pair

4.4.2 Echantillonnage d'un signal impair : vecteur Impair

Si le signal $s(t)$ est impair, le vecteur g construit après *Translation positive* (10) change de signe quand on le multiplie par la matrice de renversement : $\mathbf{R}g = -g$. Un tel vecteur sera qualifié d'**Impair**.

Remarquons qu'un vecteur **Impair** vérifie $g_0 = g_{N/2} = 0$.

Là aussi, ce caractère se conserve [Démon. §10.5] pour $G = TFD(g)$

$$\mathbf{R}g = -g, \quad G = Sg \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}G = -G \quad (12)$$

4.4.3 Vecteur quelconque = vecteur Pair + vecteur Impair

Un vecteur quelconque se décompose de façon évidente en la somme d'un vecteur **Pair** et d'un vecteur **Impair** :

$$g = \frac{g + \mathbf{R}g}{2} + \frac{g - \mathbf{R}g}{2} \quad (13)$$

4.5 Echantillonnage d'un signal réel

En échantillonnant un signal réel quelconque $s(t)$, on obtient un vecteur identique à son conjugué : $\bar{g} = g$. Cela entraîne [Démon. §10.6] $\bar{G} = \mathbf{R}G$. Ce qui implique que $\Re G$, la partie réelle de G , est un vecteur **Pair** et que $\Im G$, la partie imaginaire de G , est un vecteur **Impair**.

$$\begin{aligned} \bar{g} = g &\iff \bar{G} = \mathbf{R}G \\ \bar{G} = \mathbf{R}G &\iff \Re G \text{ Pair, } \Im G \text{ Impair} \end{aligned} \quad (14)$$

Ces propriétés peuvent être constatées sur la figure 2 (page 9).

Notons que les g_k étant réels, les composantes G_0 et $G_{N/2}$ le sont aussi :

$$(2) \Rightarrow \quad G_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \quad G_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k g_k \quad (15)$$

4.5.1 Cas d'un vecteur Pair réel

De (11) et de (14) on déduit :

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ Pair} \quad \mathbf{R}g = g \quad \mathbf{R}G = G \\ g \text{ réel} \quad \bar{g} = g \quad \bar{G} = \mathbf{R}G \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \bar{G} = G \quad (16)$$

La *TFD* d'un vecteur **Pair** réel est aussi un vecteur **Pair** réel.

4.5.2 Cas d'un vecteur Impair réel

De la même manière, de (12) et de (14) on déduit :

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ Impair} \quad \mathbf{R}g = g \quad \mathbf{R}G = -G \\ g \text{ réel} \quad \bar{g} = g \quad \bar{G} = \mathbf{R}G \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \bar{G} = -G \quad (17)$$

La *TFD* d'un vecteur **Impair** réel est un vecteur **Impair** imaginaire pur.

4.5.3 Cas d'un vecteur quelconque réel

La décomposition (13) permet de déduire

$$\Re G = TFD\left(\frac{g + \mathbf{R}g}{2}\right) \quad \Im G = TFD\left(\frac{g - \mathbf{R}g}{2}\right) \quad (18)$$

4.5.4 Tableau récapitulatif

	g Réel	g Imaginaire pur
g Pair	$TFD(g)$ Réel Pair	$TFD(g)$ Réel Impair
g Impair	$TFD(g)$ Imaginaire pur Impair	$TFD(g)$ Imaginaire pur Pair

Les propriétés résumées dans ce tableau sont les mêmes que celles que l'on observe pour les Séries de Fourier et pour la Transformée de Fourier dans le domaine du *continu*.

4.5.5 TFD simultanée de deux vecteurs réels

Les propriétés (14) et (15) nous permettent de calculer simultanément la TFD de deux vecteurs réels de même taille en formant un vecteur complexe dont la partie réelle est constituée du premier de ces vecteurs tandis que la partie imaginaire est constituée du second.

$$\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{R}^N \quad A = TFD(a) \\ b \in \mathbb{R}^N \quad B = TFD(b) \end{array} \right\} \rightarrow c = a + ib \in \mathbb{C}^N \quad C = TFD(c) = A + iB$$

Voici les formules [Démo. §10.7] qui permettent de reconstituer les parties réelle (vecteur **Pair**) et imaginaire (vecteur **Impair**) de chacun des vecteurs A et B :

$$A_0 = \Re C_0 \quad B_0 = \Im C_0 \tag{19}$$

$$A_{N/2} = \Re C_{N/2} \quad B_{N/2} = \Im C_{N/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Re A_j = \frac{1}{2}(\Re C_j + \Re C_{N-j}) \quad \Re B_j = \frac{1}{2}(\Im C_j + \Im C_{N-j}) \\ \Im A_j = \frac{1}{2}(\Im C_j - \Im C_{N-j}) \quad \Im B_j = \frac{1}{2}(\Re C_{N-j} - \Re C_j) \end{array} \right\} \text{ pour } j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

5 Polynômes Trigonométriques

5.1 Définition

Un Polynôme Trigonométrique de degré M est une fonction périodique (ici la période est T) de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qui se définit à partir de $2M+1$ coefficients $X_m \in \mathbb{C}$:

$$p_M(t) = \sum_{m=-M}^M X_m e^{+2i\pi \frac{m}{T}t} \quad (20)$$

5.2 Interpolation Trigonométrique

Soit $g \in \mathbb{C}^N$ et $G = TFD(g)$.

5.2.1 Polynôme Trigonométrique associé à G

A partir du vecteur $G \in \mathbb{C}^N$, fabriquons le vecteur $G^\star \in \mathbb{C}^{N+1}$ de la manière suivante :

$$G_j^\star = \begin{cases} \frac{1}{2}G_{N/2} & \text{pour } j = -\frac{N}{2} \\ G_{j+N} & \text{pour } j = -\frac{N}{2} + 1, \dots, -1 \\ G_j & \text{pour } j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{1}{2}G_{N/2} & \text{pour } j = \frac{N}{2} \end{cases} \quad (21)$$

C'est à peu de chose près ce qu'on obtient après la *Translation négative* décrite au §4.2 (page 8). Petite différence : la composante $G_{N/2}$ est partagée en deux parties égales placées symétriquement par rapport au 0.

Puis, à l'aide de G^\star formons le Polynôme Trigonométrique noté \tilde{p}_G de degré $\frac{N}{2}$:

$$\tilde{p}_G(t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} G_j^\star e^{+2i\pi \frac{j}{T}t} \quad (22)$$

5.2.2 Interpolation continue

Valeurs prises par \tilde{p}_G aux abscisses $\frac{kT}{N}$ [Démon. §10.8] :

$$\tilde{p}_G\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (23)$$

Le Polynôme Trigonométrique $\tilde{p}_G(t)$ interpole les g_k aux abscisses $\frac{kT}{N}$.

5.2.3 Interpolation discrète

Soit $N1$ un multiple de N : $N1 = QN$. A partir de G fabriquons le vecteur $G1$ comme suit :

$$G1_j = \begin{cases} G_j & \text{pour } j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{1}{2}G_{N/2} & \text{pour } j = \frac{N}{2} \\ 0 & \text{pour } j = \frac{N}{2} + 1, \dots, N1 - \frac{N}{2} - 1 \\ \frac{1}{2}G_{N/2} & \text{pour } j = N1 - \frac{N}{2} \\ G_{j-N1+N} & \text{pour } j = N1 - \frac{N}{2} + 1, \dots, N1 - 1 \end{cases} \quad (24)$$

Si, comme on l'a fait pour G^\star à partir de G (21), on forme $G1^\star \in \mathbb{C}^{N1+1}$ à partir de $G1 \in \mathbb{C}^{N1}$, on obtient un Polynôme Trigonométrique \tilde{p}_{G1} qui devrait être de degré $\frac{N1}{2}$, mais qui, compte tenu des zéros introduits en construisant $G1$ (24), est en fait de degré $\frac{N}{2}$. De plus, ayant les mêmes coefficients que \tilde{p}_G , il se confond avec lui :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \tilde{p}_{G1}(t) = \tilde{p}_G(t)$$

Calculons maintenant $g1 = TFDI(G1)$. La propriété d'interpolation *continue* (23) entraîne :

$$g1_{\tilde{k}} = \tilde{p}_{G1}\left(\frac{\tilde{k}T}{N1}\right) = \tilde{p}_G\left(\frac{\tilde{k}T}{N1}\right) \quad \forall \tilde{k} = 0, 1, \dots, N1 - 1$$

et en particulier pour \tilde{k} multiple de Q , c'est à dire de la forme $\tilde{k} = Qk$

$$g1_{Qk} = \tilde{p}_G\left(\frac{QkT}{N1}\right) = \tilde{p}_G\left(\frac{QkT}{QN}\right) = \tilde{p}_G\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k$$

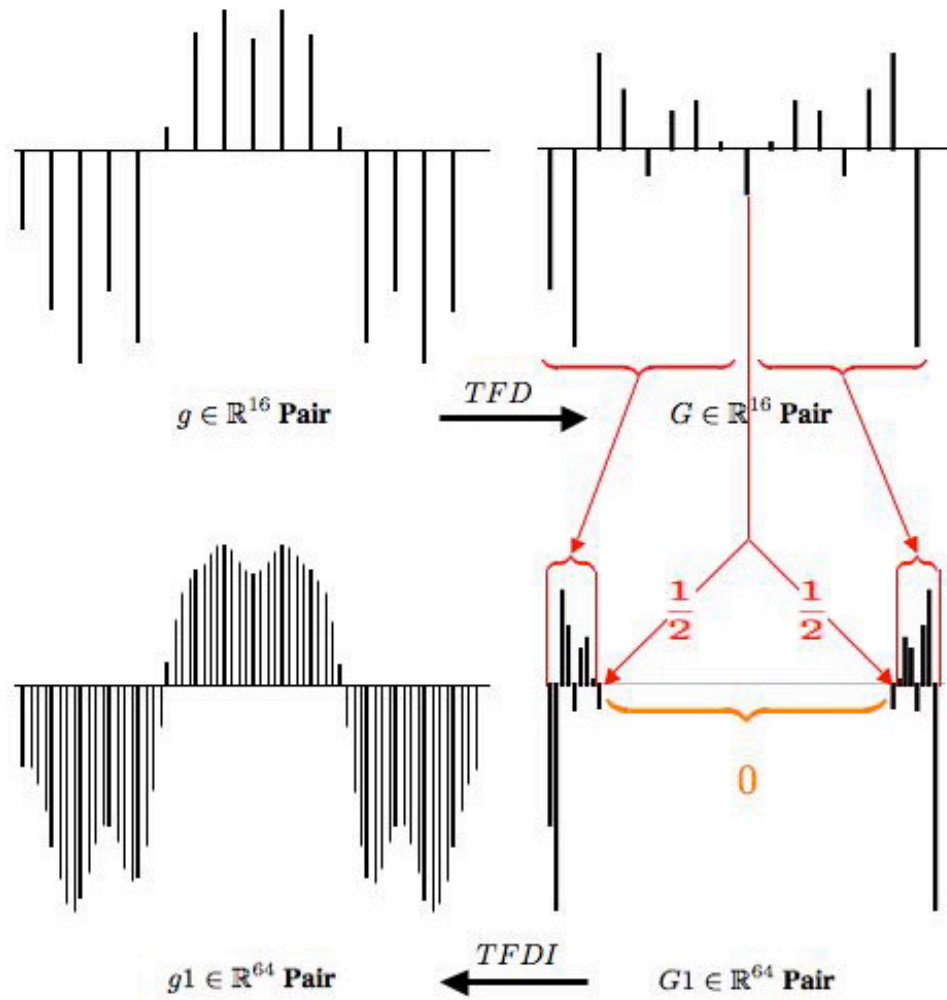


Figure 4 – Interpolation *discrète* $N = 16$, $Q = 4$

*Pour alléger la figure, le vecteur g de départ a été choisi réel et **Pair**, mais le procédé reste valable quelque soit $g \in \mathbb{C}^N$.*

Toutes les Q composantes, le vecteur $g1$ prend les mêmes valeurs que g . Entre deux multiples consécutifs, les $Q - 1$ valeurs intermédiaires prennent les valeurs du Polynôme Trigonométrique qui interpole les g_k .

On peut dire que le vecteur $g1$ interpole *discrètement* le vecteur g .

6 Produit de Convolution périodique de deux vecteurs

6.1 Les matrices circulantes

6.1.1 La matrice de permutation circulaire \mathbf{P} et ses puissances

$$\begin{array}{cccc}
 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ & & 1 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & 0 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{array} \right| \\
 \mathbf{P} & \mathbf{P}^2 & \mathbf{P}^{N-1} = \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^N = \mathbf{P}^0 = I
 \end{array} \tag{25}$$

Appliquée à un vecteur, la matrice de permutation circulaire \mathbf{P} décale les composantes d'un indice vers le bas, la dernière venant en première position.

$$h = \begin{array}{|c} h_0 \\ h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{N-1} \end{array} \quad \mathbf{P}h = \begin{array}{|c} h_{N-1} \\ h_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{N-2} \end{array}$$

6.1.2 Le produit SP

On démontre [Démon. §10.9] que $S\mathbf{P} = LS$, où L est la matrice diagonale :

$$L = \begin{array}{|c} 1 \\ e^{-2i\pi\frac{1}{N}} \\ \cdot \\ e^{-2i\pi\frac{s}{N}} \\ \cdot \\ e^{-2i\pi\frac{N-1}{N}} \end{array} \tag{26}$$

$$\begin{array}{l} \text{On dit que } S \text{ diagonalise } \mathbf{P} : \\ \text{De même, pour les puissances de } \mathbf{P} : \end{array} \quad \begin{array}{l} S\mathbf{P}S^{-1} = L \\ S\mathbf{P}^sS^{-1} = L^s \end{array} \tag{27}$$

6.1.3 Matrice circulante \mathcal{C}_h associée à un vecteur h

Soit $h \in \mathbb{C}^N$. Par définition, la matrice circulante associée à h est

$$\mathcal{C}_h = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} h_s \mathbf{P}^s \quad \mathcal{C}_h = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} h_0 & h_{N-1} & \cdot & \cdot & h_1 \\ h_1 & h_0 & \cdot & \cdot & h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdot & \cdot & h_0 \end{vmatrix} \quad (28)$$

Les colonnes de \mathcal{C}_h sont $\frac{1}{N}$ fois les vecteurs $\mathbf{P}^0 h, \mathbf{P}^1 h, \dots, \mathbf{P}^{N-1} h$. On a :

$$(\mathcal{C}_h)_{jk} = \frac{1}{N} h_{(j-k)_{\text{modulo } N}}$$

6.1.4 Le produit $S\mathcal{C}_h S^{-1}$

De (27) [page 17] on déduit immédiatement :

$$S\mathcal{C}_h S^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} h_s S\mathbf{P}^s S^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} h_s L^s \quad (29)$$

La matrice $S\mathcal{C}_h S^{-1}$, combinaison linéaire des matrices diagonales L^s est aussi une matrice diagonale. La j° composante du vecteur formé par les termes de cette diagonale est égale à

$$(S\mathcal{C}_h S^{-1})_{jj} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{js}{N}} h_s = H_j$$

où $H = TFD(h)$. On note \mathcal{D}_H cette matrice diagonale :

$$\mathcal{D}_H = \begin{vmatrix} H_0 & & & & \\ & H_1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & H_j & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & H_{N-1} \end{vmatrix}$$

S diagonalise toute matrice circulante. On peut écrire :

$S\mathcal{C}_h S^{-1} = \mathcal{D}_{TFD(h)}$	$S^{-1} \mathcal{D}_H S = \mathcal{C}_{TFDI(H)}$
$\mathcal{C}_h = S^{-1} \mathcal{D}_{TFD(h)} S$	$\mathcal{D}_H = S \mathcal{C}_{TFDI(H)} S^{-1}$

(30)

6.1.5 Inverse d'une matrice circulante

Des formules qui précèdent, on a immédiatement $\mathcal{C}_h^{-1} = S^{-1}\mathcal{D}_H^{-1}S$.

L'inverse d'une matrice diagonale est la matrice diagonale formée sur les inverses de chaque terme. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse faire cette inversion est qu'aucun des termes diagonaux ne soit nul. Si c'est le cas, en posant $\ddot{H}_j = \frac{1}{H_j}$, on a $\mathcal{D}_H^{-1} = \mathcal{D}_{\ddot{H}}$ et donc $\mathcal{C}_h^{-1} = S^{-1}\mathcal{D}_{\ddot{H}}S$. En posant $\ddot{h} = TFDI(\ddot{H})$, il vient

$$\mathcal{C}_h^{-1} = \mathcal{C}_{\ddot{h}} \quad (31)$$

En résumé,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & TFD & & & \\ & & & \rightarrow & & & \\ \mathcal{C}_h & \leftarrow & h & & H & \rightarrow & H_j \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Inv.} \\ & & & TFDI & & & \\ \mathcal{C}_h^{-1} = \mathcal{C}_{\ddot{h}} & \leftarrow & \ddot{h} & \leftarrow & \ddot{H} & \leftarrow & \ddot{H}_j = \frac{1}{H_j} \end{array}$$

6.2 Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs

6.2.1 Définition

Soient a et b deux vecteurs de \mathbb{C}^N . On appelle Produit de Convolution Périodique de ces deux vecteurs le vecteur de \mathbb{C}^N , noté $a * b$, défini comme le produit de la matrice circulante associée au vecteur b par le vecteur a :

$$c = a * b = \mathcal{C}_b a \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{(k-j) \bmod N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (32)$$

Insistons : c'est l'indice $(k - j)$ pris *modulo* N (d'où le qualificatif *Périodique*) qui va permettre d'arriver aux propriétés fondamentales (34) et (35).

On démontre [Démo. §10.10] que ce produit est commutatif : $a * b = b * a = \mathcal{C}_a b$

6.2.2 TFD du Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs

Posons $A = TFD(a)$, $B = TFD(b)$ et $C = TFD(c)$. On a

$$\begin{aligned} C &= TFD(a * b) = TFD(b * a) = TFD(\mathcal{C}_a b) = S\mathcal{C}_a b \\ (30) \Rightarrow C &= \mathcal{D}_A S b = \mathcal{D}_A B \quad \Leftrightarrow \quad C_j = A_j B_j \end{aligned}$$

Si, à partir des deux vecteurs A et B on note $A \times B$ leur **Produit Direct** (évidemment commutatif) :

$$A \times B = \mathcal{D}_A B \Leftrightarrow (A \times B)_j = A_j B_j \quad j = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (33)$$

$$\boxed{TFD(a * b) = TFD(a) \times TFD(b)} \quad (34)$$

6.2.3 TFD du Produit Direct de deux vecteurs

$$TFD(a \times b) = TFD(b \times a) = TFD(\mathcal{D}_a b) = S \mathcal{D}_a b$$

$$[\text{D\u00e9mo. } \S 10.11] \Rightarrow S \mathcal{D}_a b = N(A * B)$$

$$\boxed{TFD(a \times b) = N TFD(a) * TFD(b)} \quad (35)$$

(34) et (35) sont l'\u00e9quivalent en *discret* de la propri\u00e9t\u00e9 fondamentale de l'analyse de Fourier en *continu* mentionn\u00e9e en pr\u00e9ambule :

La TFD transforme le produit de convolution p\u00e9riodique en produit direct

La TFD transforme le produit direct en produit de convolution p\u00e9riodique

6.2.4 \u00c9l\u00e9ment neutre du Produit de Convolution P\u00e9riodique

C'est le vecteur u tel que la matrice circulante associ\u00e9e soit la matrice unit\u00e9.

$$(28) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathcal{C}_u = I \\ u_0 = N \text{ et } u_s = 0 \text{ pour } s = 1, \dots, N - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{C}^N \quad \mathcal{C}_u a = a \quad (36)$$

$$(30) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathcal{D}_U = S \mathcal{C}_u S^{-1} = S S^{-1} = I \\ \Rightarrow U_j = 1 \text{ pour } j = 0, \dots, N - 1 \end{array} \right\}$$

6.2.5 Produit de deux matrices circulantes

Le produit des deux matrices circulantes associ\u00e9es chacune \u00e0 un vecteur est la matrice circulante associ\u00e9e au produit de convolution p\u00e9riodique de ces vecteurs [D\u00e9mo. \u00a710.12] :

$$\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{C}_a \\ b \in \mathbb{C}^N \rightarrow \mathcal{C}_b \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{C}_a \mathcal{C}_b = \mathcal{C}_{a * b} \quad (37)$$

6.3 TFD et différences divisées

Soit $g \in \mathbb{C}^N$ dont on suppose que les composantes proviennent de l'échantillonnage d'un signal à des instants séparés par Δt . On pose $G = TFD(g)$. On va voir que les différences divisées (qui sont, dans le domaine *discret*, des approximations de ce qu'est la dérivation dans le domaine *continu*) se ramènent à un Produit de Convolution Périodique.

6.3.1 TFD de la différence divisée de g

On définit l'opérateur \mathbf{D} de \mathbb{C}^N dans lui-même, qui à g fait correspondre sa différence divisée $\mathbf{D}[g]$:

$$(\mathbf{D}[g])_k = \frac{g_k - g_{(k-1) \bmod N}}{\Delta t} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (38)$$

La matrice de permutation circulaire \mathbf{P} définie au §6.1.1 nous permet d'écrire :

$$\mathbf{D}[g] = \frac{1}{\Delta t} (I - \mathbf{P})g$$

$I - \mathbf{P}$ est une matrice circulante. La TFD de $\mathbf{D}[g]$ nous donne [Démon. §10.13] :

$$TFD(\mathbf{D}[g]) = \Xi \times G \quad \text{avec} \quad \Xi_j = \frac{2i e^{-i\pi \frac{j}{N}}}{\Delta t} \sin\left(\pi \frac{j}{N}\right) \quad (39)$$

6.3.2 TFD de la différence divisée centrée de g

On définit l'opérateur \mathbf{D}^c de \mathbb{C}^N dans lui-même, qui à g fait correspondre sa différence divisée centrée $\mathbf{D}^c[g]$:

$$(\mathbf{D}^c[g])_k = \frac{g_{(k+1) \bmod N} - g_{(k-1) \bmod N}}{2\Delta t} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (40)$$

La matrice de permutation circulaire \mathbf{P} nous permet d'écrire :

$$\mathbf{D}^c[g] = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P})g$$

$\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}$ est une matrice circulante. La TFD de $\mathbf{D}^c[g]$ nous donne [Démon. §10.14] :

$$TFD(\mathbf{D}^c[g]) = \Xi^c \times G \quad \text{avec} \quad \Xi_j^c = \frac{i}{\Delta t} \sin\left(2\pi \frac{j}{N}\right) \quad (41)$$

7 Filtrage Discret

Qu'est-ce que filtrer ? Dans le langage courant, cela signifie agir de façon à retenir certains éléments tout en laissant passer d'autres.

Dans le domaine du Traitement du Signal, on s'attache à modifier le *contenu en fréquence* du signal en supprimant tout ou partie de certains de ses composants via une *Fonction de Transfert*. Dans l'espace *temps*, cette opération est équivalente à un produit de convolution entre le signal et une *Réponse Impulsionnelle*, ainsi appelée car c'est le résultat obtenu quand on remplace le signal par une impulsion de Dirac placée à l'origine (δ_0) qui est l'élément neutre du produit de convolution.

Dans le cas discret, toutes ces notions ont un équivalent. A commencer dans l'espace *fréquence* où l'on se donne un vecteur que l'on appelle également Fonction de Transfert car il joue exactement le même rôle. Il lui correspond dans l'espace *temps* un vecteur que l'on appelle aussi Réponse Impulsionnelle.

7.1 Filtre idéal absolu

On a vu au §4.2 que chaque G_j est associé à une fréquence (j/T si T est la durée de l'échantillonnage ayant donné g). Un filtre idéal absolu va supprimer complètement certaines des fréquences en laissant les autres inchangées.

On définit sa **Fonction de Transfert** $\Phi \in \mathbb{R}^N$ par

$$\Phi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } J \subseteq \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (42)$$

\mathcal{D}_Φ étant la matrice diagonale formée sur le vecteur Φ , posons

$$G^* = \Phi \times G = \mathcal{D}_\Phi G \quad (33) \Rightarrow \quad G_j^* = \Phi_j G_j = \begin{cases} G_j & \text{si } j \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Retournons dans le domaine du temps en prenant la Transformée de Fourier Discrète Inverse des vecteurs G^* et Φ : $g^* = TFDI(G^*)$ et $\varphi = TFDI(\Phi)$.

φ est la **Réponse Impulsionnelle**⁵ du filtre. L'une des identités (30) nous permet de montrer que le vecteur g^* est égal au produit de convolution discrète de φ et de g :

$$g^* = S^{-1}G^* = S^{-1}\mathcal{D}_\Phi G = S^{-1}\mathcal{D}_\Phi Sg = \mathcal{C}_\varphi g \Rightarrow g^* = \varphi * g \quad (43)$$

Le vecteur g^* possède bien les caractéristiques que l'on souhaitait : les fréquences $\frac{j}{T}$ qui correspondent à $j \in J$ sont conservées tandis que les autres ont été éliminées.

5. Le vecteur *impulsion* est le vecteur $u \in \mathbb{R}^N$, élément neutre du Produit de Convolution Périodique défini au §6.2.4, formé de N suivi de $(N-1)$ zéros.

Pourquoi qualifier ce filtre d'*idéal*? Simplement parce qu'il est très coûteux quand N est très grand : il nécessite soit une *TFD* suivie d'une *TFDI*, soit, sans quitter l'espace temps, un produit de convolution discrète encore plus onéreux.

7.1.1 Exemple 1 : Filtre *Passe-bas*

Fixons la **Fréquence de Coupure** d'un filtre *Passe-bas* à $f_c = q/T$ (avec $q < N/2$) : il laisse passer les fréquences inférieures ou égales à f_c et arrête les fréquences supérieures. Le vecteur Fonction de Transfert Φ_1 qui lui correspond est :

$$\Phi_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in J = \{0, \dots, q\} \cup \{N - q, \dots, N - 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (44)$$

Compte tenu de l'interprétation de la *TFD* (§4.2) qui nous a amené à opérer une *Translation négative* de N des composantes pour $j = \frac{N}{2}, \dots, N - 1$, le vecteur $G^* = \Phi_1 \times G$ aura bien ses composantes préservées pour $|f| \leq q/T$ et supprimées pour les autres. Φ_1 étant un vecteur réel et **Pair**, le vecteur Réponse Impulsionnelle correspondant φ_1 l'est aussi. Voici son expression [Démon. §10.15] :

$$\varphi_{10} = 2q + 1 \quad \varphi_{1k} = \frac{\sin(\pi \frac{k}{N} (2q + 1))}{\sin(\pi \frac{k}{N})} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N - 1$$

7.1.2 Exemple 2 : Filtre *Passe-haut*

Pour la même fréquence de coupure $f_c = q/T$, le vecteur Fonction de Transfert Φ_2 est complémentaire de Φ_1 :

$$\Phi_{2j} = 1 - \Phi_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \notin J = \{0, \dots, q\} \cup \{N - q, \dots, N - 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (45)$$

Le résultat d'un tel filtre appliqué à un signal g est égal à la différence entre g et le résultat obtenu en lui appliquant Φ_1 . Sa Réponse Impulsionnelle φ_2 est :⁶

$$\varphi_{20} = N - \varphi_{10} \quad \varphi_{2k} = -\varphi_{1k} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N - 1$$

7.2 Remarque sur les filtres absolus

Dans le domaine *continu*, les filtres absolus qui suppriment complètement des fréquences sur des intervalles ont des fonctions de transfert qui sont nulles sur ces intervalles de mesure non nulle. Il leur correspond des réponses impulsionnelles qui, elles, ne peuvent s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle.

6. Filtre *Passe-bande* et Filtre *Stoppe-bande* se construisent par différence entre deux filtres *Passe-bas* ou deux filtres *Passe-haut*.

Dans le domaine *discret*, on a l'équivalent : si un vecteur Fonction de Transfert présente des plages de composantes consécutives nulles, le vecteur Réponse Impulsionnelle correspondant ne pourra avoir que des zéros isolés. Cela se vérifie par exemple pour le filtre passe-bas du §7.1.1 : si $k = pN/(2q + 1)$, alors φ_{1_k} est nul, mais ni $\varphi_{1_{k+1}}$ ni $\varphi_{1_{k-1}}$ ne le sont.

7.3 Filtrage par convolution “à portée limitée” dans le domaine des temps (FCPL)

L'idée : filtrer en remplaçant un point par une pondération de ses voisins immédiats.

7.3.1 Un exemple intuitif de FCPL : le lissage par moyenne glissée

Soit $g \in \mathbb{R}^N$ et soit p un entier positif avec $p \ll N$.

Si l'on forme un nouveau signal g^* en remplaçant chaque composante g_k par la moyenne des $2p + 1$ composantes de son voisinage, on sent bien que l'on va atténuer les petites variations tout en conservant l'allure générale du signal d'origine :

$$g_k^* = \frac{1}{2p + 1} \sum_{l=-p}^{+p} g_{k-l} \quad (46)$$

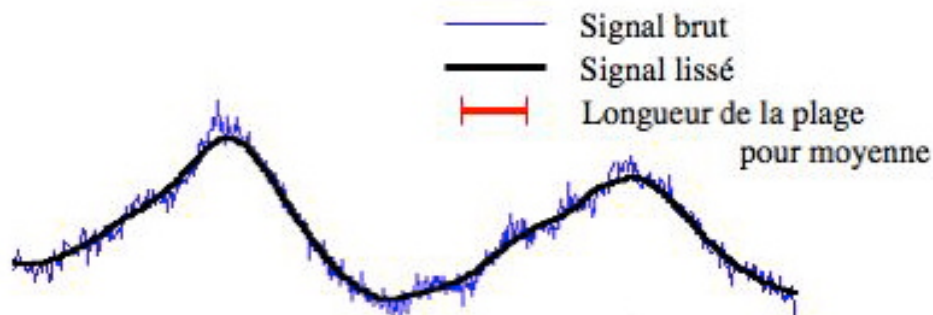


Figure 5 – Lissage par moyenne glissée sur $p = 20$ points

Ce type de lissage est assez grossier. Les voisins d'un point ont tous le même poids, $1/(2p + 1)$, dans le calcul de sa nouvelle valeur. On ne peut faire varier que la largeur de la plage via le paramètre p et l'on ne perçoit pas immédiatement la façon dont le contenu en fréquence du signal est modifié. Nous expliciterons au §7.4.2 la Fonction de Transfert ainsi que la Réponse Impulsionnelle d'un tel filtre.

7.3.2 Généralisation du FCPL

On a toujours $g \in \mathbb{R}^N$ et p un entier positif avec $p \ll N$. On se donne un vecteur $\omega \in \mathbb{C}^{2p+1}$ et l'on forme :

$$\tilde{g}_k = \sum_{l=-p}^{+p} \omega_l g_{(k-l) \text{ modulo } N} \quad (47)$$

La formule (47) fait fortement penser à la définition du Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs (§6.2.1). A ceci près que, dans cette définition, les deux vecteurs étaient de même taille. Qu'à cela ne tienne, transformons le vecteur ω en un vecteur $\psi \in \mathbb{C}^N$ en lui rajoutant autant de 0 que nécessaire et en le normalisant par N :

$$\psi_l = \begin{cases} N\omega_l & \text{pour } l = 0, \dots, p \\ 0 & \text{pour } l = p + 1, \dots, N - p - 1 \\ N\omega_{l-N} & \text{pour } l = N - p, \dots, N - 1 \end{cases} \quad \psi = \begin{pmatrix} N\omega_0 \\ N\omega_1 \\ \cdot \\ N\omega_p \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ N\omega_{-p} \\ \cdot \\ N\omega_{-1} \end{pmatrix} \quad (48)$$

(47) peut alors s'écrire :

$$\tilde{g}_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_l g_{(k-l) \text{ modulo } N} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g} = \mathcal{C}_\psi g = \psi * g \quad (49)$$

En prenant la Transformée de Fourier Discrète des vecteurs, $\tilde{G} = TFD(\tilde{g})$ et $\Psi = TFD(\psi)$, grâce à (30) on obtient ;

$$\tilde{G} = \mathcal{D}_\Psi G = \Psi \times G \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{G}_j = \Psi_j G_j \quad (50)$$

ψ est le vecteur Réponse Impulsionnelle du filtre discret.

Ψ est le vecteur Fonction de Transfert du filtre discret.

Mais la remarque (§7.2) sur les plages de zéros présentes dans un vecteur Fonction de Transfert qui interdisent d'en avoir pour le vecteur Réponse Impulsionnelle correspondant, est également valable dans l'autre sens. Ici, le vecteur Réponse Impulsionnelle ψ présentant par construction une grande plage de zéros, le vecteur Fonction de Transfert Ψ ne pourra avoir que des zéros isolés. On est donc dans l'impossibilité d'obtenir un filtre idéal absolu par ce procédé.

7.3.3 Polygone Trigonométrique associé à la Réponse Impulsionnelle d'un FCPL

Dans le §5.2.1, à partir d'un vecteur $G = TFD(g)$, on a fabriqué un polynôme trigonométrique \tilde{p}_G qui interpole les g_k . Nous allons procéder d'une façon semblable mais dans l'autre sens.

Partant du vecteur $\psi = TFDI(\Psi)$, par une démonstration tout à fait semblable à [Démon. §10.8] on aboutit à

$$\tilde{P}_\omega(f) = \sum_{l=-p}^{+p} \omega_l e^{-2i\pi \frac{l}{f_e} f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_\omega\left(\frac{j}{T}\right) = \Psi_j \quad (51)$$

Le polynôme trigonométrique \tilde{P}_ω interpole les Ψ_j . De ce fait, il peut être assimilé à la fonction de transfert du filtre.

Cas particulier de poids réels symétriques

$$\omega \in \mathbb{R}^{2p+1} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \quad \omega_{-l} = \omega_l \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_\omega(f) = \omega_0 + 2 \sum_{l=1}^{+p} \omega_l \cos\left(2\pi i \frac{l}{f_e} f\right)$$

7.3.4 Meilleure approximation par FCPL d'un filtre idéal absolu

p étant fixé, quel est le vecteur Fonction de Transfert Ψ du **FCPL** qui approche le mieux un filtre idéal absolu Φ , c'est à dire qui minimise la norme euclidienne $\|\Psi - \Phi\|_2$? On note ψ et φ leurs Réponses Impulsionnelles respectives : $\psi = TFDI(\Psi)$ et $\varphi = TFDI(\Phi)$. En notant $K = \{0, \dots, p\} \cup \{N - p, \dots, N - 1\}$ on a (voir §2.5) :

$$\|\Psi - \Phi\|_2^2 = \frac{1}{N} \|\psi - \varphi\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\psi_k - \varphi_k|^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{k \in K} |\psi_k - \varphi_k|^2 + \sum_{k \notin K} |\varphi_k|^2 \right)$$

La norme est donc minimum quand on choisit

$$\psi_k = \varphi_k \quad \text{pour} \quad k \in K \quad \Rightarrow \quad \|\Psi - \Phi\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{k \notin K} |\varphi_k|^2 \quad (52)$$

7.4 Utilisation du FCPL “au fil de l’eau”

La formalisation exposée dans le paragraphe §7.3.2 a permis d’expliciter le résultat du FCPL défini par (47) pour un vecteur de taille N . Mais comment l’interpréter quand on utilise un tel filtre “au fil de l’eau”, c’est à dire quand on ne connaît pas N ? Par exemple, on suppose que les échantillons d’un signal nous parviennent *en temps réel*. Passés les p premiers points (qui formellement dépendent des p derniers dont on ne dispose pas), on obtient un résultat absolument identique à celui obtenu pour un vecteur de taille connue. Il est donc préférable d’interpréter la Fonction de Transfert en termes de fréquences rapportées à la fréquence d’échantillonnage f_e puisque, comme on l’a vu au §4.2, l’intervalle d’analyse en fréquence $[-\frac{f_e}{2}, +\frac{f_e}{2}]$ en dépend directement. C’est une raison supplémentaire d’assimiler la fonction de transfert au polygone trigonométrique défini au §7.3.3.

7.4.1 Exemple : Meilleure approximation d’un filtre *Passe-bas* idéal

On a vu que le filtre *Passe-bas* idéal Φ défini au §7.1.1 a pour Réponse Impulsionnelle le vecteur $\varphi = TFDI(\Phi)$ dont les composantes sont :

$$\varphi_k = \frac{\sin(\pi \frac{k}{N}(2q + 1))}{\sin(\pi \frac{k}{N})} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

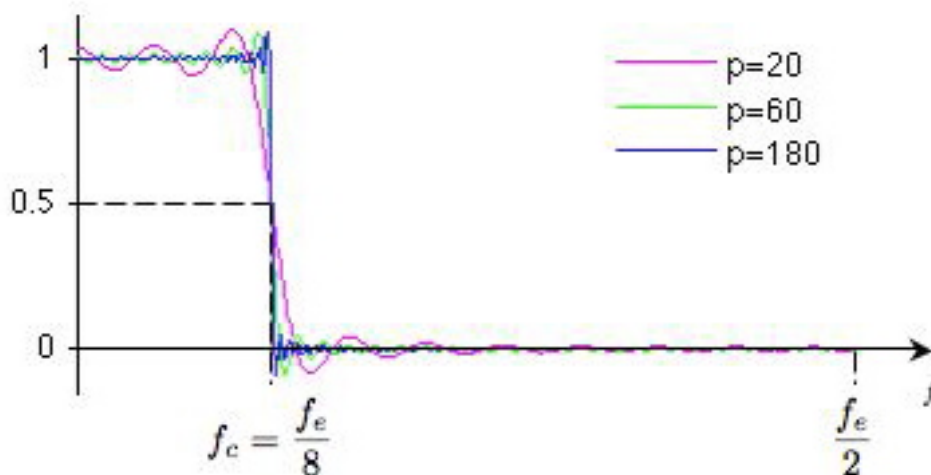


Figure 6 – Approximation d’un filtre *Passe-Bas* idéal

Dans la figure 6, pour le filtre Φ que l’on souhaite approcher, cette fréquence de coupure a été fixée à $f_c = f_e/8$.

Exprimons la fréquence de coupure f_c de Φ en proportion de f_e , la fréquence d'échantillonnage :

$$f_c = \frac{q}{T} = \frac{q}{N} \frac{N}{T} = \frac{q}{N} f_e$$

Φ étant **Pair** (voir §4.4.1), on l'a représenté ainsi que ses approximations Ψ (obtenues avec trois valeurs de p) pour $f \geq 0$. On constate sans surprise que lorsque p augmente, on tend vers le filtre idéal : l'amplitude des oscillations décroît (tandis que leur nombre s'accroît) et parallèlement la pente au point $(f_c, \frac{1}{2})$ est de plus en plus raide.

Attention ! Dans cette figure, ainsi que dans les figures 7 et 8, il ne faut pas perdre de vue que ce sont des vecteurs qui sont représentés (pour les besoins du dessin, on a fixé $N = 1024$: le pas en fréquence $\frac{1}{T}$ représente $1/512^{me}$ de l'intervalle $[0, \frac{f_e}{2}]$).

7.4.2 Réponse Impulsionnelle et Fonction de Transfert du lissage par moyenne glissée

La Réponse Impulsionnelle λ résulte de la définition (46). La Fonction de Transfert Λ se calcule (démonstration semblable au calcul de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas idéal §10.15) :

$$\lambda_k = \begin{cases} \frac{N}{2p+1} & \text{pour } k = 0, \dots, p \\ 0 & \text{pour } k = p+1, \dots, N-p-1 \\ \frac{N}{2p+1} & \text{pour } k = N-p, \dots, N-1 \end{cases} \Leftrightarrow \Lambda_j = \frac{1}{2p+1} \frac{\sin(\pi \frac{j(2p+1)}{N})}{\sin(\pi \frac{j}{N})}$$

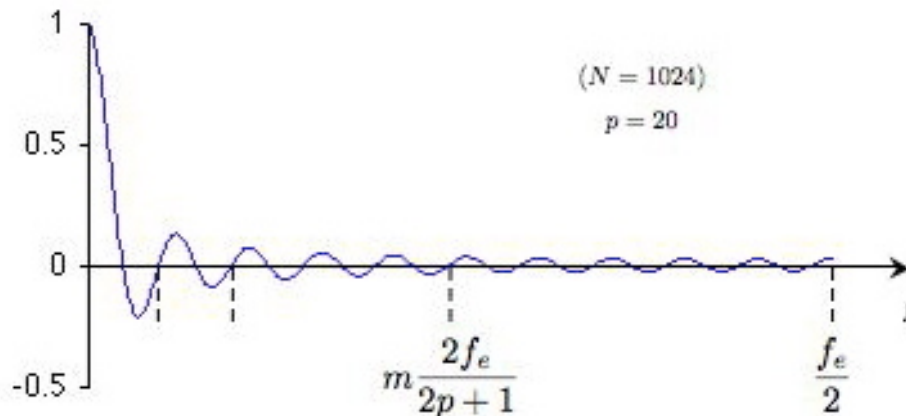


Figure 7 – Fonction de Transfert du lissage par moyenne glissée $p = 20$ ($N = 1024$)

Le vecteur λ étant réel et **Pair** (voir §4.4.1), Λ l'est aussi et la figure 7 n'en représente que la moitié. L'allure générale de cette courbe n'est pas sans rappeler celle de la fonction

sinus cardinal $\Theta(f) = \sin(2\pi af)/(2\pi af)$, qui est son équivalent en continu (a étant la demi plage où s'effectue la moyenne).

Ce graphe montre aussi les oscillations qui ne s'amortissent que très lentement : on ne supprime pas vraiment les hautes fréquences, on ne fait que les atténuer. Les zéros *ascendants* se situent aux alentours des abscisses multiples de $2f_e/(2p+1)$: en augmentant p , et donc la longueur de la plage où l'on calcule la moyenne, on rapproche de l'origine le premier zéro *descendant* $f_e/(2p+1)$.

7.5 Comment construire trois nouveaux filtres à partir d'un seul

On construit les réponses impulsionnelles et les fonctions de transfert de ces filtres à partir des poids affectés aux voisins comme on l'a fait au §7.3.2 page 25. Tous ces vecteurs sont **Pairs**.

7.5.1 Filtre 1 (Passe-bas)

Soit $\omega_1 \in \mathbb{R}^5$ un premier vecteur de poids que l'on va utiliser pour un FCPL du type de (47) :

$$\begin{aligned}\omega_{1_0} &= +4/12 \\ \omega_{1_{-1}} = \omega_{1_1} &= +3/12 \\ \omega_{1_{-2}} = \omega_{1_2} &= +1/12\end{aligned}$$

7.5.2 Filtre 2 (Passe-haut)

C'est le complémentaire du Filtre 1 (voir §7.1.2 page 23) :

$$\begin{aligned}\omega_{2_0} &= 1 - \omega_{1_0} = +8/12 \\ \omega_{2_{-1}} = \omega_{2_1} &= -\omega_{1_1} = -3/12 \\ \omega_{2_{-2}} = \omega_{2_2} &= -\omega_{1_2} = -1/12\end{aligned}$$

7.5.3 Filtre 3 (Passe-haut)

Ψ_1 étant le vecteur Fonction de Transfert du Filtre 1, on pose $\Psi_3 = \mathbf{P}^{N/2}\Psi_1$, où \mathbf{P} est la matrice de permutation circulaire définie au §6.1.1. Cette opération a pour effet de faire *tourner* les composantes de $N/2$ positions : $\Psi_{3_j} = \Psi_{1_{(j+N/2)_{\text{modulo } N}}}$. Partant d'un filtre passe-bas, on a créé un filtre passe-haut différent du Filtre 2.

On en déduit : $\psi_3 = S^{-1}\Psi_3 = S^{-1}\mathbf{P}^{N/2}\Psi_1 = S^{-1}\mathbf{P}^{N/2}S\psi_1 = L^{N/2}\psi_1$.

$L = S^{-1}\mathbf{P}S$ est la matrice diagonale qui a été définie au §6.1.2. On a $L_{kk}^{N/2} = (-1)^k$, et donc $\psi_{3_k} = (-1)^k\psi_{1_k}$. Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\omega_{3_0} &= +\omega_{1_0} = +4/12 \\ \omega_{3_{-1}} = \omega_{3_1} &= -\omega_{1_1} = -3/12 \\ \omega_{3_{-2}} = \omega_{3_2} &= +\omega_{1_2} = +1/12\end{aligned}$$

7.5.4 Filtre 4 (Passe-bas)

C'est le complémentaire du Filtre 3 :

$$\begin{aligned}\omega_{4_0} &= 1 - \omega_{3_0} = +8/12 \\ \omega_{4_{-1}} = \omega_{4_1} &= -\omega_{3_1} = +3/12 \\ \omega_{4_{-2}} = \omega_{4_2} &= -\omega_{3_2} = -1/12\end{aligned}$$

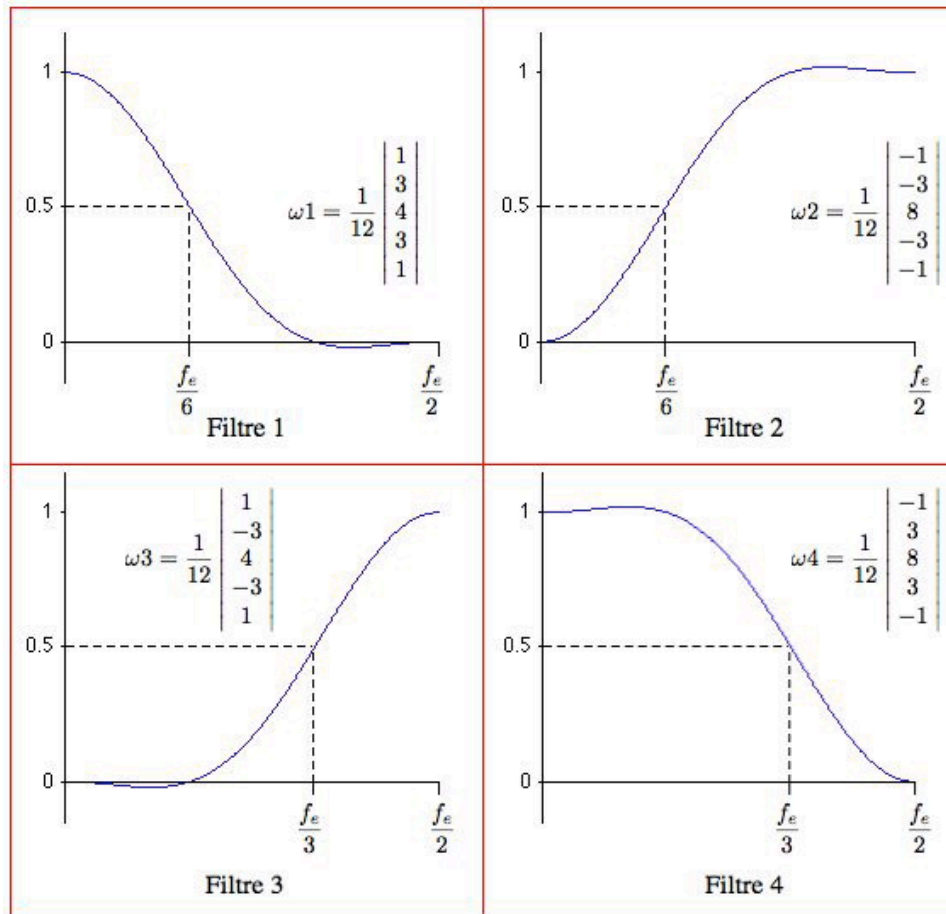


Figure 8 – Les Fonctions de Transfert des 4 filtres

Le Filtre 1 présente une forme rappelant une sigmoïde : partant du point (0, 1), son point d'inflexion se situe en $(f_e/6, 1/2)$ pour terminer très proche de 0 entre $f_e/3$ et $f_e/2$ ($|\Psi_1| < 0.021$).

Les poids de ces quatre filtres étant tous réels et symétriques (voir §7.3.3) on a :

$$\tilde{P}_\omega(f) = \omega_0 + 2\omega_1 \cos(2\pi i \frac{f}{f_e}) + 2\omega_2 \cos(2\pi i \frac{2f}{f_e})$$

8 Spectre de Puissance Discret

Dans le domaine *continu*, la Puissance d'un signal est reliée à sa norme euclidienne. Le Spectre de Puissance est par définition égal à la Transformée de Fourier de la Fonction d'Auto-Corrélation du signal. Il fournit pour chaque fréquence la puissance transportée dans le signal.

Dans le domaine *discret*, la démarche va être semblable. On suppose que g est le vecteur formé par les N échantillons d'une fonction associés à des abscisses équidistantes dans l'espace temps : $g_k = s(k\Delta t)$, avec $N\Delta t = T$. On pose $G=TFD(g)$.

8.1 AC[g] : Vecteur d'auto-corrélation périodique de g

On définit l'opérateur **AC** de \mathbb{C}^N dans lui-même, qui à g fait correspondre son vecteur d'auto-corrélation périodique :

$$\mathbf{AC}[g] = \mathbf{C}_g \mathbf{R} \bar{g} \quad (53)$$

Cette définition fait appel à la matrice de renversement **R** définie au §3.2 ainsi qu'à la matrice circulante associée au vecteur g (voir §6.1.3). Le produit $\mathbf{C}_g \mathbf{R}$ se présente ainsi :

$$\mathbf{C}_g \mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} g_s \mathbf{P}^{-s} = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdot & \cdot & g_{N-1} \\ g_1 & g_2 & \cdot & \cdot & g_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{N-1} & g_0 & \cdot & \cdot & g_{N-2} \end{vmatrix} \quad (\mathbf{C}_g \mathbf{R})_{jk} = g_{(j+k) \text{ modulo } N} \quad (54)$$

Les vecteurs colonnes sont les permutés du vecteur g , mais en sens inverse de celui de \mathbf{C}_g : successivement $\mathbf{P}^0 g, \mathbf{P}^{-1} g, \dots, \mathbf{P}^{-N+1} g$.

$$(53) \Rightarrow (\mathbf{AC}[g])_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \bar{g}_j g_{(k+j) \text{ modulo } N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (55)$$

8.2 Spec[g] : Spectre de Puissance Discret de g

C'est par définition la *TFD* du vecteur d'auto-corrélation périodique de g . On démontre [Démo. §10.17] que

$$\mathbf{Spec}[g] = \mathcal{D}_G \bar{G} \iff (\mathbf{Spec}[g])_j = |G_j|^2 \quad (56)$$

On a vu au §4.2 que chaque G_j est associé à la fréquence $\frac{j}{T}$. La Puissance transportée par cette fréquence est $|G_j|^2$.

8.3 Puissance totale et normes euclidiennes de G et de g

La Puissance totale, somme des carrés des modules des composantes de G , est donc le carré de la norme euclidienne de G dont on a vu (§2.5) qu'elle est égale à $\frac{1}{N}$ fois le carré de la norme euclidienne de g .

$$\mathcal{P} = \sum_{j=0}^{N-1} |G_j|^2 = \|G\|_2^2 = \frac{1}{N} \|g\|_2^2 \quad (57)$$

8.4 Puissance et Variance d'un signal réel

Si g est réel, sa moyenne \tilde{g} et sa variance $\sigma_{[g]}^2$ le sont aussi :

$$\tilde{g} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \quad \sigma_{[g]}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (g_k - \tilde{g})^2$$

On a $\tilde{g} = G_0$ et l'on montre [Démon. §10.18] que

$$\sigma_{[g]}^2 = \sum_{j=1}^{N-1} |G_j|^2 \quad (58)$$

La Variance est égale à la Puissance totale hors terme constant.

8.5 Spectre de Module et Spectre de Phase

Chaque composante complexe G_j peut aussi s'écrire sous la forme

$$G_j = \rho_j e^{i\varphi_j} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_j = |G_j| \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi_j = \arctan \left(\frac{\Re(G_j)}{\Im(G_j)} \right) \in [-\pi, \pi] \end{array} \right. \quad (59)$$

Le vecteur ρ est le Spectre de Module tandis que le vecteur φ est le Spectre de Phase. La Figure 9 représente le Spectre de Puissance, le Spectre de Module et le Spectre de Phase d'une portion de signal réel.

8.6 Exemple de Spectres d'un signal réel

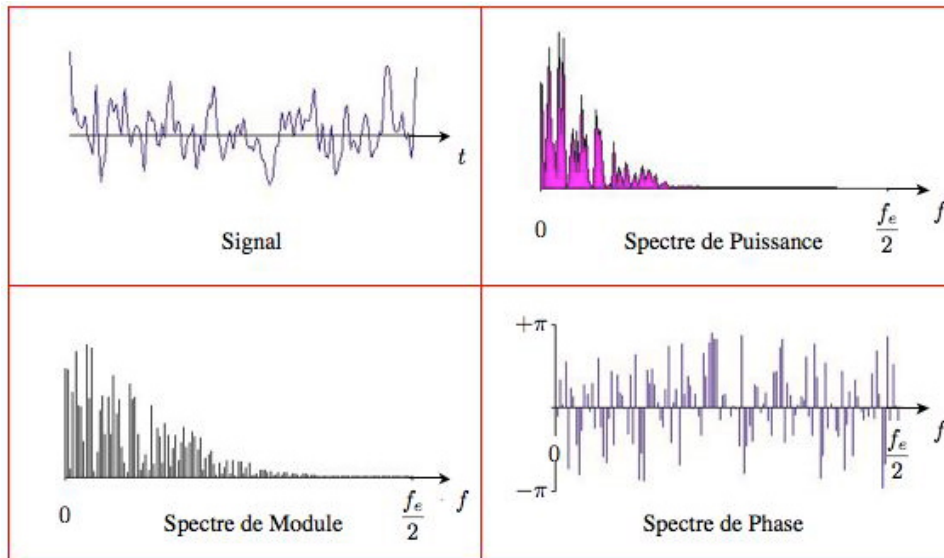


Figure 9 – Une portion de signal et les spectres correspondants

§8.4 \implies L'aire en rose "sous le spectre" de Puissance est à la mesure de la variance du signal.

9 Parallélismes

9.1 Définitions

Séries de Fourier	Transformée de Fourier	Transformée de Fourier Discrète
$\Gamma_m = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma(t) e^{-2i\pi \frac{m}{T} t} dt$	$\mathcal{G}(f) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2i\pi f t} dt$	$G_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2i\pi \frac{jk}{N}}$
\Updownarrow	\Updownarrow	\Updownarrow
$\gamma(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Gamma_m e^{+2i\pi \frac{m}{T} t}$	$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(f) e^{+2i\pi f t} df$	$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} G_j e^{+2i\pi \frac{jk}{N}}$

9.2 Dérivation

Séries de Fourier	Transformée de Fourier	Transformée de Fourier Discrète
$\gamma \longrightarrow \Gamma_m$	$g \longrightarrow \mathcal{G}$	$g \longrightarrow G$
\Downarrow	\Downarrow	\Downarrow
$\gamma' \longrightarrow 2i\pi \frac{m}{T} \Gamma_m$	$g' \longrightarrow 2i\pi f \mathcal{G}(f)$	$\mathbf{D}^c[g] \longrightarrow i \frac{N}{T} \sin\left(2\pi \frac{j}{N}\right) G_j$

9.3 Produit de Convolution

Séries de Fourier	Transformée de Fourier	Transformée de Fourier Discrète
$\gamma(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) \xi(\tau - t) dt$	$g(\tau) = \int_{\mathbb{R}} h(t) k(\tau - t) dt$	$g_q = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_j k_{(q-j) \bmod N}$
\Updownarrow	\Updownarrow	\Updownarrow
$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \lambda * \xi \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \Gamma_m = \Lambda_m \cdot \Xi_m \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} g = h * k \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \mathcal{G}(f) = \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{K}(f) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} g = h * k \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ G_j = H_j \cdot K_j \end{array} \right.$

10 Démonstrations

10.1 Rappel : série géométrique

Terme général d'une suite géométrique de raison q :

$$u_j = q^j \quad \Rightarrow \quad \text{Somme} \quad \sigma = \sum_{j=0}^{N-1} q^j = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

Cas particulier où la raison q est une racine $N^{\text{ème}}$ de l'unité :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad u_j = e^{2i\pi \frac{jk}{N}} = (e^{2i\pi \frac{k}{N}})^j$$

$$\Rightarrow \quad \text{Somme} \quad \sigma = \sum_{j=0}^{N-1} (e^{2i\pi \frac{k}{N}})^j = \frac{1 - e^{2i\pi k}}{1 - e^{2i\pi \frac{k}{N}}} = \begin{cases} N & \text{si } k = 0 \text{ modulo } N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette sommation intervient souvent dans les démonstrations qui suivent.

10.2 Normes euclidiennes de g et de G

Carré de la norme euclidienne de G :

$$\begin{aligned} \|G\|_2^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} |G_j|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} G_j \overline{G_j} && \text{(Retour §2.5)} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{jp}{N}} \overline{g_p} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \sum_{p=0}^{N-1} \overline{g_p} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{j(p-k)}{N}} \\ (\S 10.1) \Rightarrow &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} g_k \overline{g_k} N = \frac{1}{N} \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

10.6 Echantillonnage d'un signal réel

$$\underline{\bar{g} = g \iff \bar{G} = \mathbf{R}G}$$

$$\begin{aligned} g \text{ réel} &\Rightarrow \bar{g} = g && \text{(Retour §4.5)} \\ G = Sg &\Rightarrow \bar{G} = \bar{S}\bar{g} \\ (5) &\Rightarrow && = \frac{1}{N}S^{-1}\bar{g} \\ &&& = \frac{1}{N}S^{-2}S\bar{g} \\ (8) &\Rightarrow && = \mathbf{R}Sg \quad \Rightarrow \quad \bar{G} = \mathbf{R}G \end{aligned}$$

$$\underline{\bar{G} = \mathbf{R}G \iff \Re G \text{ Pair, } \Im G \text{ Impair}}$$

$$\begin{aligned} G &= \Re G + i \Im G && \text{(Retour §4.5)} \\ \bar{G} &= \Re G - i \Im G \\ \mathbf{R}G &= \mathbf{R} \Re G + i \mathbf{R} \Im G \\ \bar{G} = \mathbf{R}G &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{R} \Re G = \Re G &\Rightarrow \Re G \text{ Pair} \\ \mathbf{R} \Im G = -\Im G &\Rightarrow \Im G \text{ Impair} \end{cases} \end{aligned}$$

10.7 TFD simultanée de deux vecteurs réels

$$\begin{aligned} a &\rightarrow A = \Re A + i \Im A && \text{(Retour §4.5.5)} \\ b &\rightarrow B = \Re B + i \Im B \\ c = a + ib &\rightarrow C = A + iB \\ &&& = (\Re A - \Im B) + i(\Im A + \Re B) \end{aligned}$$

a et b sont réels. $\Rightarrow \Re A, \Im A, \Re B$ et $\Im B$ sont réels.
 $\Re A$ et $\Re B$ sont **Pairs**.
 $\Im A$ et $\Im B$ sont **Impairs**.

$$C_0 = A_0 + iB_0 \quad (15) \Rightarrow \quad A_0 = \Re C_0 \quad B_0 = \Im C_0$$

$$C_{N/2} = A_{N/2} + iB_{N/2} \quad \Rightarrow \quad A_{N/2} = \Re C_{N/2} \quad B_{N/2} = \Im C_{N/2}$$

$$\left. \begin{aligned} \Re C_j &= \Re A_j - \Im B_j & \Im C_j &= \Im A_j + \Re B_j \\ \Re C_{N-j} &= \Re A_j + \Im B_j & \Im C_{N-j} &= \Im A_{N-j} + \Re B_{N-j} \end{aligned} \right\} \text{ pour } j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\left. \begin{aligned} \Re A_j &= \frac{1}{2}(\Re C_j + \Re C_{N-j}) & \Re B_j &= \frac{1}{2}(\Im C_j + \Im C_{N-j}) \\ \Im A_j &= \frac{1}{2}(\Im C_j - \Im C_{N-j}) & \Im B_j &= \frac{1}{2}(\Re C_{N-j} - \Re C_j) \end{aligned} \right\} \text{ pour } j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

10.8 Le Polynôme Trigonométrique \tilde{p}_G interpole les g_k

$$\tilde{p}_G(t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} G_j^\star e^{+2i\pi \frac{j}{T} t} \quad (\text{Retour §5.2.2})$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_G\left(\frac{kT}{N}\right) &= \sum_{j=-N/2}^{N/2} G_j^\star e^{+2i\pi \frac{j}{T} \frac{kT}{N}} \\ &= \frac{1}{2} G_{N/2} \left(e^{-2i\pi \frac{N/2}{T} \frac{kT}{N}} + e^{+2i\pi \frac{N/2}{T} \frac{kT}{N}} \right) \\ &\quad + \sum_{j=-N/2+1}^{N/2-1} G_{j \bmod N} e^{+2i\pi \frac{j}{T} \frac{kT}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} G_j e^{+2i\pi \frac{kj}{N}} + G_{N/2} e^{+2i\pi \frac{kN/2}{N}} + \sum_{j=N/2+1}^{N-1} G_j e^{+2i\pi \frac{kj}{N}} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} G_j e^{+2i\pi \frac{kj}{N}} \end{aligned}$$

$$(4) \Rightarrow \tilde{p}_G\left(\frac{kT}{N}\right) = g_k$$

10.9 Le produit SP

$$\begin{aligned}
 SP_{jr} &= \sum_{k=0}^{N-1} S_{jk} \mathbf{P}_{kr} && \mathbf{P}_{kr} \neq 0 \quad \text{ssi} \quad k=(r+1) \text{ modulo } N \quad (\text{Retour §6.1.2}) \\
 &= S_{j(r+1) \text{ modulo } N} \\
 &= \frac{1}{N} e^{-2i\pi \frac{j(r+1)}{N}} \\
 &= e^{-2i\pi \frac{j}{N}} \frac{1}{N} e^{-2i\pi \frac{jr}{N}} \\
 &= L_{jj} \cdot S_{jr} && \Rightarrow \quad SP = LS
 \end{aligned}$$

10.10 Commutativité du Produit de Convolution Périodique de deux vecteurs

$$c = a * b \quad \Leftrightarrow \quad c_k = (\mathcal{C}_b a)_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{(k-j) \text{ modulo } N} \quad (\text{Retour §6.2.1})$$

$$\text{Posons } m = (k - j) \text{ modulo } N \quad \Leftrightarrow \quad j = (k - m) \text{ modulo } N$$

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} a_{(k-m) \text{ modulo } N} b_m = (\mathcal{C}_a b)_k \quad \Leftrightarrow \quad c = b * a$$

10.11 TFD du Produit Direct de deux vecteurs

$$\begin{aligned}
 TFD(a \times b) &= S \mathcal{D}_a b && (\text{Retour §6.2.3}) \\
 &= S(SS^{-1}) \mathcal{D}_a (SS^{-1}) b \\
 a = S^{-1} A, b = S^{-1} B &\Rightarrow && = S^2 (S^{-1} \mathcal{D}_{S^{-1} A} S) S^{-2} B \\
 (7) \Rightarrow S^2 = \frac{1}{N} \mathbf{R} &\left| \begin{array}{l} \Rightarrow \\ (30) \Rightarrow S^{-1} \mathcal{D}_H S = \mathcal{C}_{S^{-1} h} \end{array} \right. && = \frac{1}{N} \mathbf{R} \mathcal{C}_{S^{-2} A} \mathbf{N} \mathbf{R} B \\
 &&& = \mathbf{R} \mathcal{C}_{\mathbf{N} \mathbf{R} A} \mathbf{R} B \\
 &&& = N \mathcal{C}_A B = N(A * B)
 \end{aligned}$$

10.12 Produit de deux matrices circulantes

$$\begin{aligned}
 M &= \mathcal{C}_a \mathcal{C}_b && \text{(Retour §6.2.5)} \\
 SMS^{-1} &= S \mathcal{C}_a S^{-1} S \mathcal{C}_b S^{-1} \\
 &= \mathcal{D}_A \mathcal{D}_B \\
 &= \mathcal{D}_{A \times B} \\
 M &= S^{-1} \mathcal{D}_{A \times B} S \\
 (30) \Rightarrow &= \mathcal{C}_{TFDI(A \times B)} \\
 &= \mathcal{C}_{TFDI(A) * TFDI(B)} \\
 &= \mathcal{C}_{a * b}
 \end{aligned}$$

10.13 TFD de la différence divisée de g

$$\begin{aligned}
 TFD(\mathbf{D}[g]) &= S\mathbf{D}[g] && \text{(Retour §6.3.1)} \\
 &= S \frac{1}{\Delta t} (I - \mathbf{P})g \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (S - S\mathbf{P})g \\
 (27) \Rightarrow &= \frac{1}{\Delta t} (S - LS)g \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (I - L)Sg \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (I - L)G \\
 \left(TFD(\mathbf{D}[g]) \right)_j &= \frac{1}{\Delta t} (1 - e^{-2i\pi \frac{j}{N}}) G_j \\
 &= \Xi_j G_j \quad \Rightarrow \quad TFD(\mathbf{D}[g]) = \Xi \times G \\
 \text{avec } \Xi_j &= \frac{e^{-i\pi \frac{j}{N}}}{\Delta t} (e^{+i\pi \frac{j}{N}} - e^{-i\pi \frac{j}{N}}) = \frac{2ie^{-i\pi \frac{j}{N}}}{\Delta t} \sin\left(\pi \frac{j}{N}\right)
 \end{aligned}$$

10.14 TFD de la différence divisée centrée de g

Calcul tout à fait semblable à celui du §10.13

$$\begin{aligned}
 TFD(\mathbf{D}^c[g]) &= \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{S}\mathbf{P})g && \text{(Retour §6.3.2)} \\
 &= \frac{1}{2\Delta t}(L^{-1} - L)Sg \\
 &= \frac{1}{2\Delta t}(L^{-1} - L)G \\
 \left(TFD(\mathbf{D}^c[g])\right)_j &= \frac{1}{2\Delta t}(e^{+2i\pi\frac{j}{N}} - e^{-2i\pi\frac{j}{N}})G_j \\
 &= \Xi_j^c G_j \quad \Rightarrow \quad TFD(\mathbf{D}^c[g]) = \Xi^c \times G
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \Xi_j^c = \frac{i}{\Delta t} \sin(2\pi\frac{j}{N})$$

10.15 Réponse Impulsionnelle d'un filtre *Passe-bas* idéal

$$\begin{aligned}
 \Phi 1_j &= \begin{cases} 1 & \text{pour } j = 0, \dots, q \\ 0 & \text{pour } j = q + 1, \dots, N - q - 1 \\ 1 & \text{pour } j = N - q, \dots, N - 1 \end{cases} && \text{(Retour §7.1.1)} \\
 \varphi_k &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{+2i\pi\frac{jk}{N}} \Phi 1_j \\
 &= \sum_{j=-q}^{+q} e^{+2i\pi\frac{jk}{N}} \\
 &= \frac{e^{-2i\pi\frac{qk}{N}} - e^{+2i\pi\frac{(q+1)k}{N}}}{1 - e^{+2i\pi\frac{k}{N}}} \\
 &= \frac{e^{+i\pi\frac{k}{N}} (e^{+i\pi\frac{(2q+1)k}{N}} - e^{-i\pi\frac{(2q+1)k}{N}})}{e^{+i\pi\frac{k}{N}} (e^{-i\pi\frac{k}{N}} - e^{+i\pi\frac{k}{N}})} \\
 &= \frac{\sin(\pi\frac{k(2q+1)}{N})}{\sin(\pi\frac{k}{N})}
 \end{aligned}$$

10.16 Fonction de Transfert du lissage par moyenne glissée

$$\begin{aligned}
 \lambda_k &= \begin{cases} \frac{N}{2p+1} & \text{pour } k = 0, \dots, p \\ 0 & \text{pour } k = p+1, \dots, N-p-1 \\ \frac{N}{2p+1} & \text{pour } k = N-p, \dots, N-1 \end{cases} & \text{(Retour §7.4.2)} \\
 \Lambda_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} \lambda_k \\
 &= \frac{1}{2p+1} \sum_{l=-p}^{+p} e^{-2i\pi \frac{jl}{N}} \\
 &= \frac{1}{2p+1} \frac{e^{+2i\pi \frac{jp}{N}} - e^{-2i\pi \frac{j(p+1)}{N}}}{1 - e^{-2i\pi \frac{j}{N}}} \\
 &= \frac{1}{2p+1} \frac{e^{-i\pi \frac{j}{N}} (e^{+i\pi \frac{j(2p+1)}{N}} - e^{-i\pi \frac{j(2p+1)}{N}})}{e^{-i\pi \frac{j}{N}} (e^{+i\pi \frac{j}{N}} - e^{-i\pi \frac{j}{N}})} \\
 &= \frac{1}{2p+1} \frac{\sin(\pi \frac{j(2p+1)}{N})}{\sin(\pi \frac{j}{N})}
 \end{aligned}$$

10.17 Spectre de Puissance Discret de g

$$\begin{aligned}
 \text{Spec}[g] &= \text{TFD}(\mathbf{AC}[g]) & \text{(Retour §8.2)} \\
 &= \mathcal{SC}_g \mathbf{R}\bar{g} \\
 (8) \Rightarrow &= \frac{1}{N} \mathcal{SC}_g S^{-2}\bar{g} \\
 &= (\mathcal{SC}_g S^{-1}) \left(\frac{1}{N} S^{-1}\bar{g} \right) \\
 (5) \Rightarrow &= (\mathcal{SC}_g S^{-1}) (\bar{S}\bar{g}) \\
 (30) \Rightarrow &= \mathcal{D}_G \bar{G}
 \end{aligned}$$

10.18 Puissance Totale et Variance

$$\begin{aligned}
 \sigma_{[g]}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |g_k - G_0|^2 && \text{(Retour §8.4)} \\
 (4) \Rightarrow &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} G_j \right) \left(\sum_{p=1}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{pk}{N}} \overline{G_p} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} G_j \sum_{p=1}^{N-1} \overline{G_p} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{(j-p)k}{N}} \right) \\
 (\S 10.1) \Rightarrow & \sigma_{[g]}^2 = \sum_{j=1}^{N-1} |G_j|^2
 \end{aligned}$$

Références

- [1] James W. Cooley and John W. Tukey
An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series,
Math Computation **19** (1965), 297–301