

THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

André EBERHARD

Ingénieur I. M. A. G.

Algorithmes de l'analyse harmonique numérique

Thèse soutenue le 22 Juin 1970 devant la commission d'examen

MM.	J.	KUNTZMANN	Président
	N.	GASTINEL	Examineur
	J. P.	BERTRANDIAS	Examineur
	J. P.	GAUTRAY	Examineur

L I S T E D E S P R O F E S S E U R S

Doyen honoraire : Monsieur M. MORET
 Doyen : Monsieur E. BONNIER

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	NEEL Louis	Physique Expérimentale
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique Rationnelle
	CHABAUTY Claude	Calcul différentiel et intégral
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	CHENE Marcel	Chimie Papetière
	FELICI Noël	Electrostatique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	BARBIER Reynold	Géologie Appliquée
	SANTON Lucien	Mécanique des Fluides
	OZENDA Paul	Botanique
	FALLOT Maurice	Physique Industrielle
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques
	GALVANI Octave	Mathématiques
	MOUSSA André	Chimie Nucléaire
	TRAYNARD Philippe	Chimie Générale
	SOUTIF Michel	Physique Générale
	CRAYA Antoine	Hydrodynamique
	REULOS René	Théorie des Champs
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	AYANT Yves	Physique Approfondie
	GALLISSOT François	Mathématiques
Melle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques
MM.	BLAMBERT Maurice	Mathématiques
	BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	BONNIER Etienne	Electrochimie et Electrométallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	PILLET Emile	Physique Industrielle-Electrotechnique
	YOCCOZ Jean	Physique Nucléaire théorique
	DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
	GERBER Robert	Mathématiques
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	VAUQUOIS Bernard	Calcul Electronique
	BARJON Robert	Physique Nucléaire

MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique
	SILBER Robert	Mécanique des Fluides
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	KLEIN Joseph	Mathématiques
	VAILLANT François	Zoologie et Hydrobiologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	SENGEL Philippe	Zoologie
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la Cellulose
	BRISSONNEAU Pierre	Physique
	GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique
MM.	DEGRANGE Charles	Zoologie
	PEBAY-PEROULA Jean-Claude	Physique
	RASSAT André	Chimie Systématique
	DUCROS Pierre	Cristallographie Physique
	DODU Jacques	Mécanique Appliquée I. U. T.
	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des Fluides
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	PERRET René	Servo-mécanisme
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	GIDON Paul	Géologie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	DEPASSEL R.	Mécanique des Fluides
	GLENAT René	Chimie
	BARRA Jean	Mathématiques Appliquées
	COUMES André	Electronique
	PERRIAUX Jacques	Géologie et Minéralogie
	ROBERT André	Chimie Papetière
	BIARREZ Jean	Mécanique Physique
	BONNET Georges	Electronique
	CAUQUIS Georges	Chimie Générale
	BONNETAIN Lucien	Chimie Minérale
	DEPOMIER Pierre	Physique Nucléaire-Génie Atomique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
Mme.	KAHANE Josette	Physique
Mme.	BONNIER Jane	Chimie
MM.	VALENTIN Jacques	Physique
	REBECQ Jacques	Biologie
	DEPORTES Charles	Chimie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	AUBERT Guy	Physique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	RODRIGUES Alexandre	Mathématiques Pures
	MORITA Susumu	Physique Nucléaire
	RADHAKRISHNA	Thermodynamique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	LANCIA Roland	Physique Atomique
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques
MM.	KAHANE André	Physique Générale
	DOLIQUE Jean Michel	Electronique
	BRIERE Georges	Physique
	DESRE Georges	Chimie
	LAJZEHOWICZ Joseph	Physique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	LONGQUEUE Jean-Pierre	Physique
	SOHM Jean-Claude	Electrochimie
	ZADWORNY François	Electronique
	DURAND Francis	Chimie Physique
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	PFISTER Jean-Claude	Physique
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	BLOCH Daniel	Electrotechnique I. P.
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C. S. U. Chambéry)
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I. U. T.)
	BRUGEL Lucien	Energétique I. U. T.
	BOUVARD Maurice	Hydrologie
	RICHARD Lucien	Botanique
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées (I. P. G.)
	MOREAU René	Hydraulique I. P. G.
	ARMAND Yves	Chimie I. U. T.
	BOLLIET Louis	Informatique I. U. T.
	KUHN Gérard	Energétique I. U. T.
	PEFFEN René	Chimie I. U. T.
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
Melle.	PIERY Yvette	Biologie animale
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	MOHSEN Tahsin	Biologie (C. S. U. Chambéry)
	CONTE René	Mesures Physiques I. U. T.
	LE JUNTER Noël	Génie Electrique Electronique I. U. T.
	LE ROY Philippe	Génie Mécanique I. U. T.
	ROMIER Guy	Techniques Statistiques quantitatives I. U. T.
	VIALON Pierre	Géologie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	MAYNARD Roger	Physique

MM.	DUSSAUD René	Mathématiques (C. S. U. Chambéry)
	BELORIZKY Elie	Physique (C. S. U. Chambéry)
Mme.	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique (C. S. U. Chambéry)
M.	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie
MM.	BLIMAN Samuel	E. I. E.
	BEGUIN Claude	Chimie Organique
	NEGRE Robert	I. U. T.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	YAMADA Osamu	Physique du Solide
	NAGAO Makoto	Mathématiques Appliquées
	MAREZIO Massimo	Physique du Solide
	CHEECKE John	Thermodynamique
	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	ROZMARIN Georges	Chimie Papetière

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur GASTINEL pour l'ambiance qui règne au sein de son équipe, ainsi que pour les nombreux encouragements et conseils qu'il m'a prodigués.

Je remercie Monsieur le Professeur KUNTZMANN, Directeur de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Le Docteur GAUTRAY, Professeur à la Faculté de Médecine de Grenoble est à l'origine de ce travail. Notre longue collaboration a été pour moi pleine d'enrichissements. Je lui exprime ma vive gratitude.

Je remercie Monsieur le Professeur BERTRANDIAS qui a bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je suis très reconnaissant à Mademoiselle Geneviève BICAIS et à Monsieur Paul MOUNET qui ont apporté tous leurs soins à la présentation matérielle de ce travail, ainsi qu'à tous les membres du Laboratoire qui m'ont aidé dans cette tâche.

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION

CHAPITRE - I - ALGORITHME DE COOLEY ET TUKEY DANS LE CAS OU $N=2^M$ PRINCIPE DE L'ALGORITHME DANS LE CAS GENERAL

I-1 - Notations -----	I-1
I-2 - Permutation des lignes de S. Matrice $T^{(M)}$. ----	I-2
I-3 - Décomposition de $T^{(M)}$. -----	I-4
I-4 - Algorithme -----	I-9
I-5 - Coût de la méthode -----	I-12
I-6 - Permutation des colonnes de S -----	I-12
I-7 - Principe de l'algorithme de Cooley & Tukey dans le cas général -----	I-14
I-8 - D.F.T. et I.D.F.T. -----	I-18

CHAPITRE II - METHODES DE CALCUL APPROCHE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DU VECTEUR DE SES VALEURS EN DES ABSCISSES DISCRETES. APPLICATION AU CAL- CUL APPROCHE DES COEFFICIENTS DE FOURIER

II-1 - Relation entre D.F.T. et transformation de FOURIER	II-1
II-1-1 - Distribution Δ . Produit Δg -----	II-1
II-1-2 - Transformée de Fourier de Δ/N -----	II-5
II-2 - Application au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique -----	II-6
II-3 - Calcul approché de la transformée de Fourier d'une fonction -----	II-9
II-3-1 - Interpolation par un polynôme trigonométri- que -----	II-9
II-3-2 - Interpolation linéaire -----	II-10
II-4 - Cas d'échantillons prélevés entre a et a+T -----	II-13
II-4-1 - Distribution Δ_a	II-13
II-4-2 - Cas $a = -\frac{T}{2}$.	II-14

CHAPITRE III - CROSS-SPECTRE ET SPECTRE DE PUISSANCE

III-1 - Fonction de cross-correlation et cross-spectre de 2 fonctions.	
Fonction d'auto-correlation et spectre de puissance d'une fonction -----	III-1
III-1-1 - Définitions de la Fonction de Cross-correlation -----	III-1
III-1-2 - Définition du cross-spectre de 2 fonctions	III-2
III-1-3 - Fonction d'auto-correlation et spectre de puissance -----	III-3
III-2 - Cas des fonctions semi-périodiques -----	III-3
III-2-1 - Définition et propriétés -----	III-3
III-2-2 - Fonction de Cross-Correlation et Cross-Spectre -----	III-4
III-2-3 - Fonction d'auto-correlation et Spectre de Puissance -----	III-8
III-2-4 - Fonctions semi-périodiques réelles -----	III-9

CHAPITRE IV - CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE DEUX FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION A PARTIR DE LA D.F.T. DE LEURS ECHANTILLONS

IV-1 - Distribution de Cross-correlation des 2 distributions Δg_1 et Δg_2 -----	IV-1
IV-2 - Cross-Spectre de 2 distributions -----	IV-3
IV-3 - Relation entre le Cross-Spectre de 2 distributions et les Transformées de Fourier de ces distributions	IV-5
IV-4 - Calculs approchés du Cross-Spectre ou du Spectre de fonctions -----	IV-6
IV-4-1 - Première approximation -----	IV-6
IV-4-2 - Deuxième approximation. Cross-Spectre de \hat{g}_1 et \hat{g}_2 -----	IV-7
IV-5 - Cas des fonctions semi-périodiques -----	IV-11

IV-5-1 - Généralités - Cross-spectre fini -----	IV-11
IV-5-2 - Exemple -----	IV-13
IV-5-3 - Hanning -----	IV-16
IV-5-4 - Hamming -----	IV-17
IV-5-5 - Distribution optimum -----	IV-17

CHAPITRE V - POSSIBILITES ET VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY. CONVOLUTION. LISSAGE

V-1 - D.F.T. simultanée des échantillons de 2 fonctions réelles -----	V-1
V-2 - Variantes de l'algorithme de Cooley & Tukey -----	V-3
V-2-1 - Variante n° 1 -----	V-3
V-2-2 - Variante n° 2 -----	V-4
V-2-3 - Variante n° 3 -----	V-4
V-3 - Convolution discrète de deux échantillons -----	V-6
V-3-1 - Définition -----	V-6
V-3-2 - Convolution discrète regroupée -----	V-7
V-3-3 - D.F.T. et I.D.F.T. de gg' -----	V-7
V-4 - Lissage d'un échantillon -----	V-8
V-4-1 - Premier procédé de lissage -----	V-10
V-4-2 - Deuxième procédé de lissage -----	V-10

ANNEXE - EXEMPLES NUMERIQUES, FIGURES ET PROCEDURES

Coefficients de Fourier du Sinus redressé -----	A1
Figure Transformée de Fourier de Δ/N -----	A2
Figure Interpolation linéaire -----	A3

- Exemple numérique de Transformée Inverse de Fourier -----	A4
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction à support borné -----	A7
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction semi-périodique -----	A10
Figure 1 ^{ère} Approximation -----	A11
Figure avec Hanning -----	A12
Figure avec Hamming -----	A13
- Figure "Fenêtre" spectrale optimum -----	A14
- Figure Transformée de Fourier de \sqrt{N} -----	A15
- Exemple numérique de Spectre de puissance d'une fonction semi-périodique -----	A16
Figure avec Fenêtre optimum -----	A16
- Spectre de puissance d'Electroencéphalogramme -----	A17
- Exemple numérique de lissage -----	A20
- Procédures ALGOL CTG et CTGSYM -----	A23
 BIBLIOGRAPHIE -----	 A30

INTRODUCTION

C'est en 1965 que J.W. COOLEY et J.W. TUKEY mirent au point un algorithme connu sous le nom de "F.F.T." (Fast Fourier Transform) permettant de calculer de façon très avantageuse des sommes du type :

$$G_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$$

pour $j = 0, \dots, N-1$.

Cet algorithme basé sur la décomposition de N en facteurs ($N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_M$) permet un gain en nombre d'opérations d'autant plus grand que les facteurs p_i sont plus petits. (Pour $p_i \equiv 2$; $i = 1, \dots, M$; $N = 2^M$ le coût est en $M \times 2^{M-1}$ au lieu de 2^{2M} pour la méthode ordinaire).

La F.F.T. a révolutionné les techniques numériques de l'analyse harmonique en permettant de calculer les transformées de Fourier de fonctions connues en un très grand nombre de points, calculs auxquels on renonçait devant le coût des méthodes classiques.

Dans le premier chapitre nous donnons une illustration matricielle de l'algorithme qui est due à Marshall C. PEASE (cf. [3]).

Puis nous analysons le lien qui existe entre la Transformation de Fourier d'une fonction continue et la F.F.T. qui est une transformation discrète. Le passage se fait aisément grâce à la théorie des distributions et nous faisons souvent référence à L. SCHWARTZ.

L'ancienne "filière" qui permettait d'obtenir le cross-spectre de deux fonctions en calculant leur fonction de cross-correlation (dans le but essentiel de réduire le nombre de points) dont on prenait ensuite la transformée de Fourier a été abandonnée. La F.F.T. permet de l'obtenir beaucoup plus rapidement et nous montrons comment au chapitre IV. Nous montrons également comment pondérer les valeurs aux abscisses discrètes des signaux pour obtenir une "fenêtre spectrale" optimum dans un certain sens.

Enfin nous donnons des variantes de l'algorithme permettant en particulier de calculer moins de valeurs qu'on en a au départ tout en conservant le bénéfice du nombre d'opérations.

On trouvera en annexe les procédures écrites en ALGOL ainsi que des exemples d'utilisation (ces programmes sont employés journallement au Laboratoire de Calcul de l'Université de Grenoble pour l'obtention de spectres dans l'analyse d'électro-encéphalogrammes).

CHAPITRE - I

ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY DANS LE CAS OU $N = 2^M$

PRINCIPE DE L'ALGORITHME DANS LE CAS GENERAL

I-1 - NOTATIONS

Soit à calculer :

$$G_j = \sum_{k=0}^{2^M-1} e^{2i\pi \frac{jk}{2^M}} \cdot g_k \quad (\text{I-1 ; 1})$$

pour $j = 0, \dots, 2^M-1$

En notation matricielle (*)

$$\vec{G} = S \vec{g} \quad S \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{2^M}, \mathbb{C}^{2^M})$$

Si l'on désigne par C_M la racine "principale" d'ordre 2^M de l'unité :

$$C_M = e^{\frac{2i\pi}{2^M}} \quad S_{jk} = C_M^{jk}$$

(*) Une lettre minuscule désignera en général dans la suite du texte un élément de l'espace de départ. La même lettre majuscule désignant l'élément qui lui correspond dans l'espace d'arrivée.

Comme nous le verrons au chapitre II, \vec{g} est un vecteur de \mathbb{C}^N dont les composantes sont les valeurs que prend une fonction complexe g à certaines abscisses.

Le produit $j.k$ n'intervient que modulo 2^M . Nous représentons S dans une écriture simplifiée $[S]^{(M)}$ en remplaçant C_M^{jk} par $jk \pmod{2^M}$. Dans cette notation :

$$[S]_{pq}^{(M)} = a \Leftrightarrow S_{pq} = C_M^a$$

Dans le cas où $M = 3$, cela donne

$$[S]^{(M)} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right| \end{array} \quad (\text{I-1 ; 2})$$

I-2 - PERMUTATION DES LIGNES DE S - MATRICE $T^{(M)}$

Par construction tous les éléments d'une ligne de S sont des multiples de l'indice (ou numéro) de cette ligne. Nous allons permuer ces lignes de façon à les agencer par "*ordre de parité*" décroissant. Pour cela :

- numérotons les lignes de S de 0 à $2^M - 1$ en binaire en utilisant M digits 0 ou 1 ;
- inversons l'ordre des digits pour chaque nombre binaire ;
- le nombre binaire ainsi obtenu nous donne le nouveau numéro d'ordre de la ligne correspondante.

Appelons P la matrice de cette permutation.

Pour $M = 3$:

$$\begin{array}{rcl}
 0 & 000 & 000 & 0 \\
 1 & 001 & 100 & 4 \\
 2 & 010 & 010 & 2 \\
 3 & 011 & 110 & 6 \\
 4 & 100 & 001 & 1 \\
 5 & 101 & 101 & 5 \\
 6 & 110 & 011 & 3 \\
 7 & 111 & 111 & 7
 \end{array} \Rightarrow P = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

On observe que tous les numéros pairs se retrouvent dans la première moitié, la seconde moitié comportant ces mêmes numéros augmentés de 1.

Tous les multiples de 4 sont dans le premier quart, le deuxième quart comportant ces mêmes numéros augmentés de 2, etc...

Appelons $T^{(M)}$ la matrice S ainsi permutée : $T^{(M)} = PS$.

$$[T^{(M)}]^{(M)} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right|
 \end{array} \quad (I-2 ; 1)$$

Si p est l'indice de ligne de T^M : ($0 \leq p \leq 2^M - 1$)

$$p = \sum_{k=0}^{M-1} d_k \cdot 2^k \quad d_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Cette même ligne, dans S avait le numéro :

$$r_M(p) = \sum_{k=0}^{M-1} d_k \cdot 2^{M-1-k}$$

le q^o élément de cette ligne vaut donc :

$$T_{pq}^{(M)} = S_{r_M(p)q} = e^{2i\pi \frac{r_M(p) \cdot q}{2^M}}$$

I-3 - DECOMPOSITION DE $T^{(M)}$

Décomposons $T^{(M)}$ en 4 sous-matrices carrées d'ordre 2^{M-1} :

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad (\text{I-3 ; 1})$$

I-3-1 - Sous-matrice α

$$\alpha_{pq} = T_{pq}^{(M)} \quad p = 0, \dots, 2^{M-1} - 1$$

$$q = 0, \dots, 2^{M-1} - 1$$

$$\begin{aligned}
 p < 2^{M-1} \quad d_{M-1} &= 0 & r_M(p) &= \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^{M-1-k} \\
 & & &= 2 \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^{M-2-k} \\
 & & &= 2r_{M-1}(p) \\
 \alpha_{pq} &= T_{pq}^{(M)} = S_{r_M(p)q} = e^{2i\pi \frac{2r_{M-1}(p) \cdot q}{2^M}} = e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{pq}^{(M-1)}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = T^{(M-1)}$$

(I-3 ; 2)

où $T^{(M-1)}$ est la matrice que nous aurions obtenue à partir de S avec un M inférieur d'une unité.

I-3-2 - Sous-matrice β

$$\begin{aligned}
 \beta_{p,q} &= T_{p, 2^{M-1}+q}^M & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
 & & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
 \end{aligned}$$

$$p < 2^{M-1} \quad r_M(p) = 2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{p,q} &= T_{p, 2^{M-1}+q}^{(M)} = e^{\frac{2i\pi r_{M-1}(p) \cdot (2^{M-1}+q)}{2^M}} \\
 &= e^{2i\pi(r_{M-1}(p) + \frac{r_{M-1}(p)q}{2^{M-1}})} \\
 &= e^{\frac{2i\pi r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{pq}^{(M-1)}
 \end{aligned}$$

$$\beta = \alpha = T^{(M-1)}$$

(I-3 ; 3)

I-3-3 - Sous-matrice γ

$$\begin{aligned}
 \gamma_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p,q}^{(M)} & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
 & & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
 \end{aligned}$$

$$2^{M-1}+p = 2^{M-1} + \sum_{k=0}^{M-2} d_k \cdot 2^k$$

$$r_M(2^{M-1}+p) = 1+r_M(p) = 1+2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p,q}^{(M)} = S_{r_M(2^{M-1}+p),q} = e^{2i\pi \frac{(1+2r_{M-1}(p)) \cdot q}{2^M}} \\
&= e^{2i\pi \left(\frac{q}{2^M} + \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}} \right)} \\
&= e^{2i\pi \frac{q}{2^M}} \cdot e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} = T_{p,q}^{(M-1)} \cdot e^{2i\pi \frac{q}{2^M}}
\end{aligned}$$

$$\gamma = T^{(M-1)} \cdot L^{(M-1)}$$

(I-3 ; 4)

où $L^{(M-1)}$ est une matrice diagonale $L_{jk}^{(M-1)} =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e^{2i\pi \frac{j}{2^M}} & \text{si } j=k=0, \dots, 2^{M-1}-1 \end{cases} \quad (\text{I-3 ; 5})$$

I-3-4 - Sous-matrice δ

$$\begin{aligned}
\delta_{p,q} &= T_{2^{M-1}+p, 2^{M-1}+q}^{(M)} & p &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\
& & q &= 0, \dots, 2^{M-1}-1
\end{aligned}$$

$$r_M(2^{M-1}+p) = 1+2r_{M-1}(p)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{pq} &= S_{r_M} (2^{M-1+p}) 2^{M-1+q} = e^{\frac{2i\pi (1+2r_{M-1}(p)) (2^{M-1+q})}{2^M}} \\
&= e^{2i\pi \frac{2^{M-1}}{2^M}} \cdot e^{2i\pi \frac{q}{2^M}} \cdot e^{2i\pi r_{M-1}(p)} \cdot e^{2i\pi \frac{r_{M-1}(p) \cdot q}{2^{M-1}}} \\
&= (-1) \cdot L_{qq}^{(M-1)} \cdot (1) \cdot T_{pq}^{(M-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta = -T^{(M-1)} \cdot L^{(M-1)}}$$

(I-3 ; 6)

D'où :

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} T^{(M-1)} & T^{(M-1)} \\ T^{(M-1)} L^{(M-1)} & -T^{(M-1)} L^{(M-1)} \end{vmatrix}$$

$$T^{(M)} = \begin{vmatrix} T^{(M-1)} & 0 \\ 0 & T^{(M-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^{(M-1)} & 0 \\ 0 & L^{(M-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^{(M-1)} & I^{(M-1)} \\ I^{(M-1)} & -I^{(M-1)} \end{vmatrix}$$

(I-3 ; 7)

Dans le cas $M = 3$

$$\begin{array}{l}
 [T^{(3)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 [T^{(2)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
 [T^{(2)}]^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 \text{et } [L^{(2)}]^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

I-4 - ALGORITHME

L'algorithme de COOLEY et TUKEY est le suivant :

Pour calculer $\vec{G} = S\vec{g}$, on va d'abord calculer $\vec{G}^{**} = T^{(M)}\vec{g} = PS\vec{g} = P\vec{G}$

C'est-à-dire que le vecteur \vec{G}^{**} obtenu sera perturbé et il faudra réordonnancer ses composantes par la même règle décrite au § 1-2 pour obtenir la solution \vec{G} (la matrice de permutation P étant symétrique $P^{-1} = P$ et $\vec{G} = P\vec{G}^{**}$).

Soit $R_0 = T^{(M)}$ et $V_0 = \vec{g}$

On a :

$$\vec{G}^{**} = R_0 V_0 = R_1 \Delta_0 \Lambda_0 V_0$$

$$R_1 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ T^{M-1} & & & \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ T^{M-1} & & & \\ | & & & | \end{vmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ I^{M-1} & & & \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ L^{M-1} & & & \\ | & & & | \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_0 = \begin{vmatrix} | & & & | \\ I^{M-1} & & & I^{M-1} \\ | & & & | \\ \hline & & & \\ | & & & | \\ I^{M-1} & & & -I^{M-1} \\ | & & & | \end{vmatrix}$$

Le premier pas consiste à calculer $V_1 = \Delta_0 \Lambda_0 V_0$ avec les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} V_1(j) &= V_0(j) + V_0(j+2^{M-1}) \\ V_1(j+2^{M-1}) &= C_M^j \times [V_0(j) - V_0(j+2^{M-1})] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} j &= 0, \dots, 2^{M-1}-1 \\ C_M^j &= e^{2i\pi \frac{j}{2^M}} \end{aligned} \quad (I-4 ; 1)$$

On est ramené au calcul de $G^* = R_1 V_1 = R_2 \Delta_1 \Lambda_1 V_1 = R_2 V_2$ avec :

$$R_2 = \begin{vmatrix} T^{(M-2)} & & & \\ & T^{(M-2)} & & \\ & & T^{(M-2)} & \\ & & & T^{(M-2)} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} I^{(M-2)} & 0 & & \\ 0 & L^{(M-2)} & & \\ & & I^{(M-2)} & 0 \\ & & 0 & L^{(M-2)} \end{vmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \begin{vmatrix} I^{(M-2)} & I^{(M-2)} & & \\ I^{(M-2)} & -I^{(M-2)} & & \\ & & I^{(M-2)} & I^{(M-2)} \\ & & I^{(M-2)} & -I^{(M-2)} \end{vmatrix}$$

Au k^e pas on aura : $V_k = \Delta_{k-1} \Lambda_{k-1} V_{k-1}$ $G^* = R_k V_k$

$$R_k = \begin{vmatrix} T^{(M-k)} & & & 0 \\ & T^{(M-k)} & & \\ & & T^{(M-k)} & \\ & & & T^{(M-k)} \end{vmatrix} \quad \Delta_{k-1} = \begin{vmatrix} \overbrace{2^{M-k+1}} & & & \\ I^{(M-k)} & 0 & & \\ 0 & L^{(M-k)} & & \\ & & & \end{vmatrix} \quad \Lambda_{k-1} = \begin{vmatrix} I^{(M-k)} & I^{(M-k)} \\ I^{(M-k)} & -I^{(M-k)} \end{vmatrix}$$

2^k blocs 2^{k-1} blocs 2^{k-1} blocs

Les formules permettant le passage de V_{k-1} à V_k seront :

$$V_k(q \times 2^{M-1+1+j}) = V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j}) + V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}})$$

$$V_k(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}}) = C_M^{j \times 2^{k-1}} \times [V_{k-1}(q \times 2^{M-1+1+j}) - V_{k-1}(q \times 2^{M-k+1+j+2^{M-k}})]$$

(I-4 ; 2)

pour $j = 0, \dots, 2^{k-k-1}$

$$q = 0, \dots, 2^{k-1-1}$$

avec

$$C_M^{j \times 2^{k-1}} = L_{jj}^{(M-k)} = e^{2i\pi \frac{j}{2^{M-k+1}}} = e^{2i\pi \frac{j \times 2^{k-1}}{2^M}} = L_{j \times 2^{k-1}, j \times 2^{k-1}}^{(M-1)}$$

Après le M^o pas, $\vec{G}^* = R_M V_M$.

R_M est formé de 2^M blocs $T^{(0)}$ d'ordre 1 placés sur la diagonale $T^{(0)} = e^0 = 1$
 $R_M = I$ et

$$\vec{G}^* = V_M$$

En résumé :

$$\vec{G}^* = \underbrace{\Delta_{M-1} \Delta_{M-1} \Delta_{M-2} \Delta_{M-2} \dots \Delta_k \Delta_k \Delta_{k-1} \Delta_{k-1} \Delta_{k-2} \dots \Delta_1 \Delta_1 \Delta_0 \Delta_0 V_0}_{V_{k-1}}$$

$$\vec{G}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \prod_{k=M-1} \Delta_k \Delta_k \end{pmatrix} \vec{g}$$

V_k

(I-4 ; 3)

I-5 - COUT DE LA METHODE

Le k^e pas coûte $2^{k-1} \times 2^{M-k} = 2^{M-1}$ multiplications, additions, soustractions de nombres complexes autant d'additions et autant de soustractions.

Pour M pas $M \times 2^{M-1}$ au lieu de 2^{2M} pour la méthode ordinaire.

I-6 - PERMUTATION DES COLONNES DE S

En opérant la permutation P sur les colonnes de S (au lieu des lignes) ainsi que sur les composantes de \vec{g} nous aurions obtenu directement \vec{G} également en M pas à l'aide d'un algorithme similaire :

$$\begin{aligned}\vec{G} &= S\vec{g} \\ &= SPP\vec{g} \quad (P^2 = I) \\ &= U^{(M)}\vec{g}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U^{(M)} = SP &= (T^{(M)})^t = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Pi & \\ & & \Delta_k \Lambda_k \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{matrix} M-1 \\ \Pi \\ k=0 \end{matrix} \Lambda_k^t \Delta_k^t\end{aligned}$$

$$\Lambda_k^t = \Lambda_k \text{ et } \Delta_k^t = \Delta_k \quad U^{(M)} = \begin{matrix} M-1 \\ \Pi \\ k=0 \end{matrix} \Lambda_k \cdot \Delta_k$$

En posant $q = M-1-k$

$$U^{(M)} = \begin{matrix} 0 \\ \Pi \\ q=M-1 \end{matrix} \Lambda_{M-1-q} \Delta_{M-1-q}$$

$$\vec{G} = U^{(M)} \vec{g}^*$$

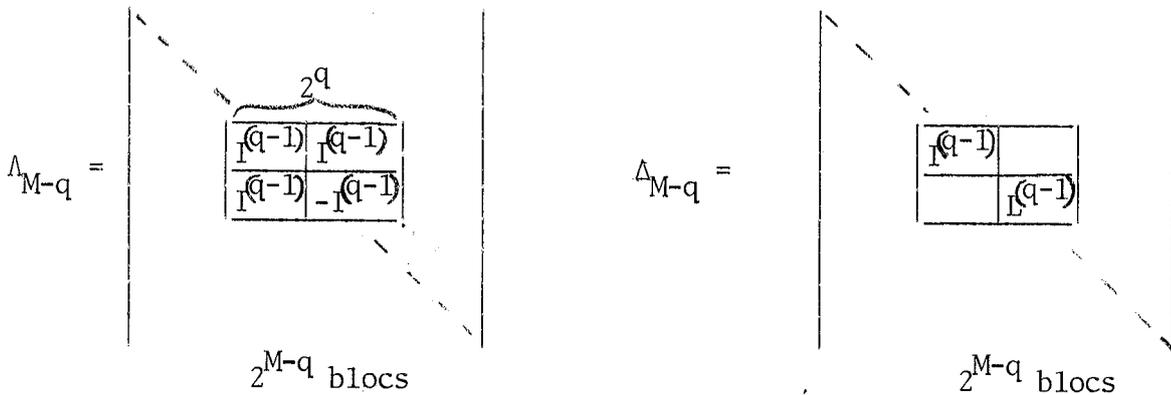
$$\vec{G} = \Lambda_0 \Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{M-1-q} \Lambda_{M-1-q} \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q+1} \cdots \Lambda_{M-1} \Lambda_{M-1} \vec{g}^*$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{w_{q-1}}$
 $\underbrace{\hspace{25em}}_{w_q}$

Au q^e pas on aura

$$w_q = \Lambda_{M-q} \Lambda_{M-q} w_{q-1} \quad (w_0 = \vec{g}^*)$$

avec :



Les formules correspondantes sont :

$$w_q(k \times 2^{q+j}) = w_{q-1}(k \times 2^{q+j}) + C_M^{j \times 2^{M-q}} \times w_{q-1}(k \times 2^{q+j+2^{q-1}})$$

$$w_q(k \times 2^{q+j+2^{q-1}}) = w_{q-1}(k \times 2^{q+j}) - C_M^{j \times 2^{M-q}} \times w_{q-1}(k \times 2^{q+j+2^{q-1}})$$

pour $j = 0, \dots, 2^{q-1}-1$

et $k = 0, \dots, 2^{M-q}-1$

(I-6 ; 1)

I-7 - PRINCIPE DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY DANS LE CAS GENERAL $N = \prod_{m=1}^M r_m$

Supposons que $N = r_1 r_2 r_3 \dots r_M$ ($r_m \neq 1$) et que l'on veuille calculer

$$G_j = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{jk}{N}} g_k \quad \text{pour } j = 0, \dots, N-1 \quad (\vec{G} = S\vec{g}) \quad (\text{I-7;0})$$

Quel que soit k indice de ligne de la matrice S ($k \in \{0, \dots, N-1\}$), il existe des δ_ℓ ($\delta_\ell \in \{0, \dots, r_\ell - 1\}$; $\ell = 1, \dots, M$) tels que :

$$\begin{aligned} k = & \delta_M \\ & + \delta_{M-1} r_M \\ & + \dots \\ & + \delta_\ell r_{\ell+1} r_{\ell+2} \dots r_M \\ & + \dots \\ & + \delta_1 r_2 r_3 \dots r_M \end{aligned}$$

En posant $r_{M+1} = 1$:

$$k = \sum_{\ell=1}^M \delta_\ell \prod_{m=\ell+1}^{M+1} r_m \quad (\text{I-7 ; 1})$$

Pour un ordre fixé (r_1, r_2, \dots, r_M) des facteurs composant N , la détermination des δ_ℓ est unique pour un k donné (c'est une écriture de k en base croisée.

Exemple : $2^h 35^{\text{min}} 10^{\text{sec}} 6/10$).

La permutation que l'on va effectuer sur les lignes de la matrice S consiste là aussi à inverser l'ordre des digits δ_ℓ pour chaque numéro de ligne.

Ainsi la k° ligne de S aura après permutation la position $q(k)$ donnée par :

$$\begin{aligned}
 q(k) &= \delta_1 \\
 &+ \delta_2 r_1 \\
 &+ \dots \\
 &+ \delta_M r_1 r_2 \dots r_{M-1}
 \end{aligned}$$

En posant $r_0 = 1$:

$$q(k) = \sum_{\ell=1}^M \delta_{\ell} \prod_{m=0}^{\ell-1} r_m \quad (\text{I-7 ; 2})$$

Exemple : $M = 3$ $r_1 = 2$ $r_2 = 2$ $r_3 = 3 \Rightarrow N = 12$

k	$\delta_1 \delta_2 \delta_3$	$\delta_3 \delta_2 \delta_1$	q(k)	$ S ^{(M)}$
0	0 0 0	0 0 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1	0 0 1	1 0 0	4	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
2	0 0 2	2 0 0	8	0 2 4 6 8 10 0 2 4 6 8 10
3	0 1 0	0 1 0	2	0 3 6 9 0 3 6 9 0 3 6 9
4	0 1 1	1 1 0	6	0 4 8 0 4 8 0 4 8 0 4 8
5	0 1 2	2 1 0	10	0 5 10 3 8 1 6 11 4 9 2 7
6	1 0 0	0 0 1	1	0 6 0 6 0 6 0 6 0 6 0 6
7	1 0 1	1 0 1	5	0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5
8	1 0 2	2 0 1	9	0 8 4 0 8 4 0 8 4 0 8 4
9	1 1 0	0 1 1	3	0 9 6 3 0 9 6 3 0 9 6 3
10	1 1 1	1 1 1	7	0 10 8 6 4 2 0 10 8 6 4 2
11	1 1 2	2 1 1	11	0 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cette fois, si $|S|_{jk}^{(M)} = a$, on a $S_{jk} = e^{2i\pi \frac{a}{N}}$

$$[T^{(M)}]^{(M)}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0	7	2	9	4	11	6	1
0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4
0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2	0	10
0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0	2
0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8
0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	5	10	3	8	1	6	11
0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	11	10	9	8	7	6	5

$$T^{(M)} = PS.$$

On voit immédiatement que la matrice de permutation P n'est pas symétrique (pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que, quel que soit m, $r_m = r_{M+1-m}$).

La matrice $T^{(M)}$ se décompose en r_M^2 blocs carrés d'ordre $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{M-1}$.

Dans notre cas :

$$T^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline T^{(2)} & T^{(2)} & T^{(2)} \\ \hline T^{(2)}_{L^{(2)}} & \alpha T^{(2)}_{L^{(2)}} & \alpha^2 T^{(2)}_{L^{(2)}} \\ \hline T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} & \alpha^2 T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} & \alpha T^{(2)}_{(L^{(2)})^2} \\ \hline \end{array}$$

$$[T^{(2)}]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad [T^{(2)}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$T^{(2)}$ est la matrice que nous aurions obtenue après permutation de S pour $N = r_1 \times r_2$

$$[L^{(2)}]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ et } \alpha = e^{2i\pi \frac{4}{12}} = e^{2i\pi \frac{1}{3}}$$

Le premier pas est basé sur la décomposition $T^{(m)}$ en un produit de 3 matrices :

$$T^{(3)} = \begin{vmatrix} T^{(2)} & & \\ & T^{(2)} & \\ & & T^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & & \\ & L^{(2)} & \\ & & (L^{(2)})^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & I & I \\ I & \alpha I & \alpha^2 I \\ I & \alpha^2 I & \alpha^4 I \end{vmatrix}$$

(I-7 ; 3)

Puis on décomposera chaque bloc $T^{(M-1)}$ en r_{M-1}^2 blocs carrés d'ordre $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_{M-2}$, etc... jusqu'au $M^{\text{ème}}$ pas.

Le coût de chaque pas dépend de la valeur du facteur r_m par lequel on divise les dimensions de la matrice $T^{(m)}$.

$Q(r_m)$ désignant le nombre de multiplications/additions de nombres complexes à effectuer, on a :

$$Q(2) = \frac{N}{2}$$

$$Q(3) = 2N$$

$$Q(5) = 4N$$

et l'on montre que pour r_m nombre premier différent de 2 :

$$Q(r_m) = (r_m - 1) N$$

Le coût total est donc :

$$Q_{\text{total}} = \sum_{m=1}^M (r_m - 1) N \quad (\text{I-7 ; 4})$$

I-8 - D.F.T. et I.D.F.T.

L'application linéaire S qui à $\vec{g} \in \mathbb{C}^N$ fait correspondre $\vec{G} \in \mathbb{C}^N$ par la formule (I-7;0) est appelée Inverse Discrete Fourier Transform (I.D.F.T.).

L'application inverse ($\vec{g} = S^{-1}\vec{G}$) est appelée Discrete Fourier Transform (D.F.T.). Il est clair que :

$$g_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} G_j \quad (\text{I-8 ; 1})$$

Naturellement, l'algorithme de COOLEY et TUKEY sert aussi à calculer les D.F.T. Simplement dans le cas où $N = 2^M$ les termes de la matrice diagonale $L^{(M-1)}$ deviennent :

$$L_{jk}^{(M-1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e^{-2i\pi \frac{jk}{2^M}} & \text{si } j = k = 0, \dots, 2^{M-1}-1 \end{cases}$$

et toutes les composantes du vecteur résultant sont à multiplier par $\frac{1}{2^M}$.

Partant d'un vecteur \vec{g} de coordonnées g_k ($k = 0, \dots, N-1$), nous noterons \vec{G}^- sa D.F.T. et \vec{G}^+ son I.D.F.T.

$G_j^- = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$	D.F.T.
	$j = 0, \dots, N-1$
$G_j^+ = \sum_{k=0}^{N-1} e^{+2i\pi \frac{jk}{N}} g_k$	I.D.F.T.
	$j = 0, \dots, N-1$

(I-8 ; 2)