IV-3 - RELATION ENTRE LE CROSS-SPECTRE DE DEUX DISTRIBUTIONS ET LES TRANSFORMEES DE FOURIER DE CES DISTRIBUTIONS

Par définition, la cross-correlation des distributions $\frac{1}{N}\,\Delta g_1$ et $\frac{1}{N}\,\Delta g_2$ nous est donnée par :

$$(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)\ \mathrm{CC}\ (\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2) = \tfrac{1}{N}\,\overline{(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)^{\tau}} * (\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2)$$

En prenant la transformée de Fourier on obtient le cross-spectre :

$$\mathfrak{F}\,[(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)\ \mathrm{CC}\ (\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2)] = \tfrac{1}{N}\,\mathfrak{F}\,[\overline{(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)^{\tau}}]\,.\,\mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2]$$

On montre aisément que :

$$\mathfrak{F}\,[\overline{(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)^{\tau}}] = \bar{\mathfrak{F}}\,[\tfrac{1}{N}\,\overline{\Delta g_1}] = \overline{\mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1]} \qquad \text{(IV-3 ; 1)}$$

d'où :

$$\mathfrak{F}\,[(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)\ \mathrm{CC}\ (\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2)] = \tfrac{1}{N}\,\overline{\mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1]}\,.\,\mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2] \qquad \text{(IV-3 ; 2)}$$

Si l'on a effectué la D.F.T. des vecteurs $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$, on a obtenu :

$$\bar{G}_{1_j} = \mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1]\,(\tfrac{j}{T}) \qquad \text{et} \qquad \bar{G}_{2_j} = \mathfrak{F}\,[\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2]\,(\tfrac{j}{T})$$

D'où :

$$\boxed{\mathfrak{F}\,[(\tfrac{1}{N}\,\Delta g_1)\ \mathrm{CC}\ (\tfrac{1}{N}\,\Delta g_2)]\,(\tfrac{j}{T}) = \tfrac{1}{N}\,\overline{\bar{G}_{1_j}}\,.\,\bar{G}_{2_j}} \qquad \text{(IV-3 ; 3)}$$

Partant de 2 fonctions g_1 et g_2 dont les valeurs aux abscisses $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\ldots,N-1)$ ont formé les vecteurs $\vec{g_1}$ et $\vec{g_2}$, calculer leurs D.F.T. $\vec{G_1^-}$ et $\vec{G_2^-}$ puis effectuer le produit composante à composante des vecteurs $\frac{1}{N}\overline{\vec{G_1^-}}$ et $\vec{G_2^-}$ revient donc à calculer le cross-spectre (qui est une fonction) des distributions $\frac{1}{N}\Delta g_1$ et $\frac{1}{N}\Delta g_2$ pour les fréquences $\frac{j}{T}$ $(j = 0,\ldots,N-1)$.

On peut aussi écrire

$$\mathfrak{F}[\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2](\tfrac{j}{T}) = N\, \overline{G^-_{1_j}} \cdot G^-_{2_j} \qquad \text{(IV-3 ; 4)}$$

IV-4 - CALCUL APPROCHE DU CROSS-SPECTRE DE 2 FONCTIONS OU DU SPECTRE DE PUISSANCE D'UNE FONCTION

IV-4-1 - Première approximation

Nous avons vu au paragraphe (II-3-1) qu'à toute fonction g, non périodique, prenant les valeurs g_k aux abscisses $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\ldots,N-1)$, on savait associer une fonction $\tilde{g}$, nulle en dehors de $[0,T[$, et coïncidant sur $[0,T]$ avec la fonction périodique g_T ayant pour coefficients de Fourier les $G^-_{1_j}$ $(j = 0,\ldots,N-1)$ et telle que

$$\tilde{g}(k\tfrac{T}{N}) = g_k \qquad \text{pour } k = 0,\ldots,N-1$$

Et l'on avait :

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}[\tilde{g}](\tfrac{j}{T}) = T\, G^-_j & j &= 0,\ldots,\tfrac{N}{2}-1 \\ &\mathfrak{F}[\tilde{g}](\tfrac{j-N}{T}) = T\, G^-_j & j &= \tfrac{N}{2}\ldots N-1 \end{aligned} \qquad \text{(IV-4 ; 0)}$$

Si, de la même façon on associe $\tilde{g}_1$ à g_1 et $\tilde{g}_2$ à g_2 et que l'on forme leur produit de cross-correlation (à partir de la définition (III-1 ; 2) puisque $\tilde{g}_1$ et $\tilde{g}_2$ ont le même support borné $[0,T[$) on obtient

$$[\tilde{g}_1 \text{ CC } \tilde{g}_2](u) = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{\tilde{g}_1(t)} \cdot g_2(t+u)\,du$$

et, d'après (III-1 ; 4)

$$\tilde{g}_1 \text{ CC } \tilde{g}_2 = \frac{1}{T} \; \overline{\tilde{g}_1}^{\tau} * \tilde{g}_2$$

En prenant la transformée de Fourier on obtient le cross-spectre :

$$P_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2} = \frac{1}{T} \overline{\mathcal{F}[\tilde{g}_1]} \cdot \mathcal{F}[\tilde{g}_2]$$

qui, compte-tenu de (IV-4 ; 0), prend aux abscisses $\frac{j}{T}$ les valeurs :

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2}\left(\frac{j}{T}\right) = T\, \overline{G^-_{1_j}} \cdot G^-_{2_j} & j = 0,\dots,\frac{N}{2}-1 \\ P_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2}\left(\frac{j-N}{T}\right) = T\, \overline{G^-_{1_j}} \cdot G^-_{2_j} & j = \frac{N}{2},\dots,N-1 \end{array}} \qquad \text{(IV-4 ; 1)}$$

Dans le cas où $g_1 = g_2 = g$, on obtient pour le Spectre de Puissance de $\tilde{g}$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_{\tilde{g}}\left(\frac{j}{T}\right) = T|G^-_j|^2 & j = 0,\dots,\frac{N}{2}-1 \\ P_{\tilde{g}}\left(\frac{j-N}{T}\right) = T|G^-_j|^2 & j = \frac{N}{2},\dots,N-1 \end{array}} \qquad \text{(IV-4 ; 2)}$$

IV-4-2 - Deuxième approximation - Cross-spectre de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$

Si, comme on l'a fait pour g au paragraphe (II-3-2) on forme $\hat{g}_1 = \Delta g_1 * h$ et $\hat{g}_2 = \Delta g_2 * h$, ces fonctions ayant le même support borné $[-\frac{T}{N}, T]$, leur fonction de cross-correlation s'écrit :

$$\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 = \frac{N}{(N+1)T}\ \overline{(\Delta g_1 * h)}^{\tau} * (\Delta g_2 * h) \qquad \text{(IV-4 ; 3)}$$

Le produit de convolution étant commutatif et associatif :

$$\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 = \frac{N}{(N+1)T}\ (\overline{\Delta g_1}^{\tau} * \Delta g_2) * (\overline{h}^{\tau} * h)$$

$$\overline{h}^{\tau} = h \Rightarrow \hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2 = \frac{N^2}{(N+1)T}\ (\Delta g_1 \text{ CC } \Delta g_2) * (h * h) \qquad \text{(IV-4 ; 4)}$$

La fonction de cross-correlation des fonctions $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$ est donc le résultat de la convolution de la distribution de cross-correlation des distributions $\frac{N^2}{(N+1)T}\ \Delta g_1$ et Δg_2 avec la fonction $h*h$.

Le produit de convolution de la fonction h (def. (II-3 ; 2)) avec elle-même est une fonction réelle, paire, nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{2T}{N}, \frac{2T}{N}\right]$ et qui vaut :

$$[h*h](v) = \frac{1}{6}\left[3\frac{N^2}{T^2}|v|^3 - 6\frac{N}{T}v^2 + 4\frac{T}{N}\right] \qquad \text{pour } 0 \leq |v| \leq \frac{T}{N}$$

$$\text{(IV-4 ; 5)}$$

$$[h*h](v) = \frac{1}{6}\left[-\frac{N^2}{T^2}|v|^3 + 6\frac{N}{T}v^2 - 12|v| + 8\frac{T}{N}\right] \text{ pour } \frac{T}{N} \leq |v| \leq \frac{2T}{N}$$

$[h*h]$ est continue ainsi que ses dérivées première et seconde.

D'autre part (voir (IV-1 ; 3), (Δg_1) CC (Δg_2) s'écrit :

$$(\Delta g_1) \text{ CC } (\Delta g_2) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p\ \delta_{p\frac{T}{N}} \qquad \text{(IV-4 ; 6)}$$

$$\text{avec } \varphi_p = \begin{cases} \text{si } -N+1 \leq p < 0 : \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=-p}^{N-1} \overline{g_{1_k}}\ g_{2_{k+p}} \\ \text{si } 0 \leq p \leq N-1 : \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1-p} \overline{g_{1_k}}\ g_{2_{k+p}} \end{cases}$$

On a donc :

$$[\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](t) = \sum_{p=-N+1}^{N-1} \varphi_p . [h*h](t-\frac{pt}{N}) \qquad \text{(IV-4 ; 7)}$$

Quelque soit $t \in \mathbb{R}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}$ et $u \in [0, \frac{T}{N}[$ tels que $t = q\frac{T}{N} + u$. En posant $\varphi_p = 0$ si $p \notin \{-N+1, \ldots, N-1\}$

$$[\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N}+u) = \varphi_q [h*h](u) + \varphi_{q+1}[h*h](u-\frac{T}{N})$$

$$+ \varphi_{q-1}[h*h](u+\frac{T}{N}) + \varphi_{q+2}[h*h](u-\frac{2T}{N})$$

$$\boxed{\begin{aligned}[\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N}+u) = \frac{1}{6}\,[&(3\varphi_q - 3\varphi_{q+1} - \varphi_{q-1} + \varphi_{q+2})\frac{N^2}{T^2}u^3 \\ &+(-6\varphi_q + 3\varphi_{q+1} + 3\varphi_{q-1})\frac{N}{T}u^2 \\ &+(3\varphi_{q+1} - 3\varphi_{q-1})u \\ &+(4\varphi_q + \varphi_{q+1} + \varphi_{q-1})\frac{T}{N}]\end{aligned}} \qquad \text{(IV-4 ; 8)}$$

$$u = 0 \quad [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N}) = \frac{T}{6N}[4\varphi_q + \varphi_{q+1} + \varphi_{q-1}]$$

$$u \to \frac{T}{N} \quad [\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2](q\frac{T}{N}+u) \to \frac{T}{6N}[\varphi_q + 4\varphi_{q+1} + \varphi_{q+2}]$$

La fonction de cross-correlation de $\hat{g}_1$ et de $\hat{g}_2$ est continue et l'on peut vérifier qu'il en est de même de ses dérivées première et seconde.

Sa transformée de Fourier, cross-spectre de $\hat{g}_1$ et $\hat{g}_2$, vérifie compte-tenu de (IV-4 ; 4)

$$P_{\hat{g}_1\hat{g}_2} = \mathfrak{F}\,[\hat{g}_1 \text{ CC } \hat{g}_2] = \frac{N^2}{(N+1)T}\,\mathfrak{F}\,[(\Delta g_1) \text{ CC } (\Delta g_2)]\cdot(\mathfrak{F}\,[h])^2 \qquad \text{(IV-4 ; 9)}$$

et, pour une abscisse de la fréquence égale à $\frac{j}{T}$, (IV-3 ; 4) et (IV-3 ; 5) entraînent

$$\boxed{P_{\hat{g}_1\hat{g}_2}\left(\frac{j}{T}\right) = T\,\frac{N}{(N+1)}\left(\frac{\sin\pi\frac{j}{T}}{\pi\frac{j}{N}}\right)^4 \overline{G_{1_{j_N}}}\,.G_{2_{j_N}} \qquad j\in\mathbb{Z},\quad j_N = j \pmod N \in\{0,\ldots,N-1\}}$$

(IV-4 ; 10)

Pour le spectre de puissance de la fonction $\hat{g}$ on a :

$$\boxed{P_{\hat{g}}\left(\frac{j}{T}\right) = T\,\frac{N}{(N+1)}\left(\left(\frac{\sin\pi\frac{j}{N}}{\pi\frac{j}{N}}\right)^2 |G_{j_N}|\right)^2 \qquad j\in\mathbb{Z},\quad j_N = j \pmod N \in\{0,\ldots,N-1\}}$$

(IV-4 ; 11)

Si les résultats donnés par la première approximation ((IV-4 ; 1) et (IV-4 ; 2)) ainsi que ceux donnés par interpolation linéaire sont satisfaisants dans le cas de fonctions à support borné (voir exemple numérique en annexe), il n'en est pas de même pour les fonctions semi-périodiques.

IV-5 - CAS DES FONCTIONS SEMI-PERIODIQUES

IV-5-1 - Généralités-Cross-spectre fini

Le problème que l'on se pose est de localiser les fréquences communes à deux signaux semi-périodiques, de déterminer l'importance relative des coefficients attachés à ces fréquences et le déphasage d'un signal par rapport à l'autre pour chaque fréquence, lorsque ces signaux nous sont connus que par leurs échantillons aux instants $k\frac{T}{N}$ $k = 0,\dots,N-1$.

Nous avons vu (III-2 ; 9) que le cross-spectre théorique de deux fonctions semi-périodiques complexes était la distribution.

$$P_{g_1g_2} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} r_q^1 r_q^2 \, e^{i(\varphi_q^1-\varphi_q^2)} \delta_{f_q}$$

La répartition des fréquences f_q sur $\mathbb{R}$ nous étant inconnue, et ayant la contrainte d'opérer de façon discrète, nous choisirons une échelle arbitraire de fréquences sur $\mathbb{R}$

$$\lambda_j = \frac{j}{T} \quad , \quad j = -\frac{N}{2},\dots,\frac{N}{2}-1$$

avec l'hypothèse que pour tout q tel que $|f_q| > \frac{N}{2T}$ l'on puisse négliger les coefficients r_q^1 et r_q^2.

Cette échelle de fréquence étant choisie, nous voudrions calculer pour chaque indice j une grandeur V_j^{12} proportionnelle aux coefficients $r_q^1 r_q^2 \, e^{i(\varphi_q^1-\varphi_q^2)}$ des masses de Dirac de la distribution $P_{g_1g_2}$ placées à des abscisses f_q voisines de $\frac{j}{T}$. Naturellement cette grandeur V_j^{12} devra être le moins possible affectée par des masses de Dirac situées loin de $\frac{j}{T}$ sur la droite R. Un autre aspect important est la "conservation de l'énergie" : quelque soit l'emplacement d'une masse de Dirac du cross-spectre entre $\frac{j}{T}$ et $\frac{j+1}{T}$ le total de ses contributions dans le calcul de V_j et de V_{j+1} devra varier le moins possible.

L'idéal de ce que nous voudrions serait obtenu en calculant ce que nous appelerons le cross-spectre fini de g_1 et g_2 et que nous définissons par

$$V_j^{12} = [P_{g_1 g_2} * h](\frac{j}{T}) \qquad \text{(IV-5 ; 1)}$$

où h est la fonction définie par

$$h(\lambda) = \begin{cases} 1-|\lambda|T & \text{si } |\lambda| < \frac{1}{T} \\ 0 \text{ ailleurs} & \end{cases}$$

On aurait en effet :

$$V_j^{12} = \langle \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1}\, c_q^2\, \delta_{f_q} (\frac{j}{T} - \lambda), h(\lambda) \rangle$$

$$V_j^{12} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \overline{c_q^1}\, c_q^2\, h(\frac{j}{T} - f_q)$$

En posant

$$I_j = \{q \in \mathbb{Z} \mid f_q \in [\frac{j-1}{T}, \frac{j+1}{T}]\}$$

$$q \in I_j \Rightarrow f_q = \frac{j}{T} + \varepsilon_q \qquad \varepsilon_q \in [-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]$$

$$V_j^{12} = \sum_{q \in I_j} \overline{c_q^1}\, c_q^2\, (1-|\varepsilon_q|T) \qquad \text{(IV-5 ; 2)}$$

Chaque masse de Dirac n'influerait que sur les V_j et V_{j+1} correspondant aux fréquences $\frac{j}{T}$ et $\frac{j+1}{T}$ qui encadrent son abscisse f_q sur $\mathbb{R}$ et la somme de ses contributions serait rigoureusement constante et égale à $\overline{c_q^1}\, c_q^2$.

Malheureusement pour obtenir le cross-spectre fini V^{12} il faudrait calculer la transformée de Fourier (pour les valeurs $\frac{j}{T}$) du produit de la transformée inverse de Fourier de h (qui est connue mais dont le <u>support n'est pas borné</u>) par la fonction de cross-correlation de g_1 et g_2 que l'on ne connait pas.

IV-5-2 - Exemple

Supposons que g_1 et g_2 soient de la forme

$$g_1(t) = r^1 \, e^{i(2\pi ft-\varphi^1)}$$
$$g_2(t) = r^2 \, e^{i(2\pi ft-\varphi^2)} \qquad \text{(IV-5 ; 3)}$$

et que, l'échantillonnage étant fait aux instants $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\ldots,N-1)$ on ait les inégalités

$$0 < f < \frac{N}{2T}$$

La D.F.T. des échantillons $\vec{g_1}$ et $\vec{g_2}$ nous fournit (II-1 ; 7)

$$\bar{G}_{1_j} = \langle \mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j}{T}-\lambda), \mathfrak{F}[g](\lambda)\rangle$$
$$= \langle \mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j}{T}-\lambda), r^1 \, e^{-i\varphi^1}\delta_f(\lambda)\rangle$$

$$\bar{G}_{1_j} = r^1 \, e^{-i\varphi^1}\mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j}{T}-f)$$

et

$$\bar{G}_{2_j} = r^2 \, e^{-i\varphi^2}\mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j}{T}-f)$$

Si l'on forme le produit $\overline{G^-_{1_j}}.G^-_{2_j}$ (à un facteur près c'est la première approximation du cross-spectre de deux fonctions pour la fréquence $\frac{j}{T}$) on obtient :

$$W_j = \overline{G^-_{1_j}}.G^-_{2_j}$$

$$= r^1\, e^{i\varphi^1}\, \overline{\mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(\tfrac{j}{T}-f)}\,.r^2 e^{-i\varphi^2}\, \mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(\tfrac{j}{T}-f)$$

$$\boxed{W_j = r^1 r^2\, e^{-i(\varphi^2-\varphi^1)}\ \left|\mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(\tfrac{j}{T}-f)\right|^2 \qquad j = -\tfrac{N}{2},\ldots,\tfrac{N}{2}-1} \qquad \text{(IV-5 ; 4)}$$

et la transformée de Fourier de Δ/N étudiée au paragraphe (II-1-2) nous donne

$$\left|\mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(\lambda)\right|^2 = \left(\frac{\sin\pi\, T\lambda}{N\,\sin\pi\,\frac{T}{N}\,\lambda}\right)^2 \qquad \text{(IV-5 ; 5)}$$

(voir courbe figure 1)

avec les valeurs particulières

$$\left|\mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(0)\right|^2 = 1$$

$$\left|\mathfrak{F}\,[\Delta/N]\,(\tfrac{p}{T})\right|^2 = 0 \qquad p = 1,2,\ldots,N-1 \qquad \text{(IV-5 ; 6)}$$

Si $f = \frac{q}{T}$ on aura :

$$W_q = r^1 r^2\, e^{-i(\varphi^2-\varphi^1)}$$

$$W_j = 0 \qquad j \neq q \qquad \text{(IV-5 ; 7)}$$

et c'est ce que nous désirions puisque cela permet de déterminer le produit $r^1 r^2$ et la différence de phase $\varphi^2-\varphi^1$ entre les deux signaux.

Par contre si $f = \frac{q}{T} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{T}\right[$
on obtiendra

$$W_j = r^1 r^2 \, e^{-i(\varphi^2-\varphi^1)} \left(\frac{\sin \pi(j-q-\varepsilon T)}{N \sin \frac{\pi}{N}(j-q-\varepsilon T)}\right)^2 \qquad \text{(IV-5 ; 8)}$$

On assiste à un "étalement" du spectre (voir figure 4).
Dans le cas le plus défavorable ou $\varepsilon = \frac{1}{2T}$, en posant $\Gamma = r^1 r^2 e^{-i(\varphi^2-\varphi^1)}$, on obtient en supposant N grand

$$W_q = W_{q+1} = \Gamma\left(\frac{1}{N \sin \frac{\pi}{2N}}\right)^2 \simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \Gamma$$

$$W_{q-1} = W_{q+2} = \Gamma\left(\frac{1}{N \sin \frac{3\pi}{2N}}\right)^2 \simeq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Gamma \qquad \text{(IV-5 ; 9)}$$

$$W_{q-2} = W_{q+3} = \Gamma\left(\frac{1}{N \sin \frac{5\pi}{2N}}\right)^2 \simeq \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Gamma$$

A une distance égale à $\frac{2,5}{T}$ de l'abscisse réelle de la masse de Dirac du spectre on recueille encore 4 % de ce que l'on a recueilli à une distance égale à $\frac{0,5}{T}$ qui ne représentait déjà qu'environ 40 % du poids réel.

Divers procédés sont connus pour "resserrer" le spectre (cf. [4] p. 98). Nous en montrerons deux connus dans la littérature sous le nom de Hanning (du nom de Julius von Hann) et de Hamming(du nom de R.W. Hamming) et un troisième qui sera optimum dans un certain sens.

IV-5-3 - Hanning

Ce procédé consiste à remplacer $G^-_{1_j}$ et $G^-_{2_j}$ par une pondération (0,25|0,5|0,25) avant de faire le produit du conjugué de l'un par l'autre.

$$G^{Han}_{1_j} = 0,25\ G^-_{1_{j-1}} + 0,5\ G^-_{1_j} + 0,25\ G^-_{1_{j+1}} \qquad \text{(IV-5 ; 10)}$$

$$= <0,25\ \mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j-1}{T} - \lambda) + 0,5\ \mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j}{T} - \lambda)$$

$$+ 0,25\ \mathfrak{F}[\Delta/N](\tfrac{j+1}{T} - \lambda),\ \mathfrak{F}[g_1](\lambda)>$$

$$= <|\mathfrak{F}[\Delta/N] * (\tfrac{1}{4}\delta_{-\frac{1}{T}} + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{4}\delta_{\frac{1}{T}})](\tfrac{j}{T} - \lambda),\ \mathfrak{F}[g_1](\lambda)>$$

$$\bar{\mathfrak{F}}[\tfrac{1}{4}\delta_{-\frac{1}{T}} + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{4}\delta_{\frac{1}{T}}](u) = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\pi \tfrac{u}{T}) = \mu(u) \qquad \text{(IV-5 ; 11)}$$

$$G^{Han}_{1_j} = <\mathfrak{F}[\Delta\mu/N](\tfrac{j}{T} - \lambda),\ \mathfrak{F}[g_1](\lambda)>$$

$$G^{Han}_{1_j} = \mathfrak{F}[\Delta\mu g_1/N](\tfrac{j}{T}) \qquad \text{(IV-5 ; 12)}$$

De même :

$$G^{Han}_{2_j} = \mathfrak{F}[\Delta\mu g_2/N](\tfrac{j}{T})$$

avec

$$\Delta\mu g_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \mu(k\tfrac{T}{N})\ g_1(\tfrac{kT}{N})\ \delta_{\frac{kT}{N}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\pi \tfrac{k}{N})\ g_{1_k}\ \delta_{\frac{kT}{N}}$$

Pour que ∇g soit une distribution ne faisant intervenir g que par ses valeurs aux abscisses $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,1,\ldots,N-1)$, la forme la plus générale de ∇ est :

$$\nabla = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, \delta_{\frac{kT}{N}} \qquad \text{(IV-5 ; 15)}$$

On va déterminer

$$\gamma \in \mathbb{C}^N \qquad \gamma = \begin{vmatrix} \gamma_o \\ \vdots \\ \gamma_{N-1} \end{vmatrix}$$

de façon que la quantité

$$\beta = \frac{\displaystyle\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} |\mathcal{F}[\nabla](\lambda)|^2 \, d\lambda}{\displaystyle\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} |\mathcal{F}[\nabla](\lambda)|^2 \, d\lambda} \qquad \text{(IV-5 ; 16)}$$

soit maximum.

On a :

$$\mathcal{F}[\nabla](\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda} \qquad \text{(fonction de période } \frac{N}{T} \text{)}$$

$$\beta = \frac{\displaystyle\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda}\right)\left(\sum_{q=0}^{N-1} \bar{\gamma}_q \, e^{2i\pi\frac{T}{N}q\lambda}\right) d\lambda}{\displaystyle\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, e^{-2i\pi\frac{T}{N}k\lambda}\right)\left(\sum_{q=o}^{N-1} \bar{\gamma}_q \, e^{2i\pi\frac{T}{N}q\lambda}\right) d\lambda}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q\neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \, e^{2i\pi\frac{T}{N}(q-k)\lambda}\right) d\lambda}{\displaystyle\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q\neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \, e^{2i\pi\frac{T}{N}(q-k)\lambda}\right) d\lambda}$$

$$\beta = \frac{\frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q\neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{N}{\pi T(q-k)} \frac{\left[e^{2i\pi\frac{T}{N}(q-k)\lambda}\right]_{-\frac{1}{T}}^{1/T}}{2i}}{\frac{N}{T}\sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q\neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{N}{\pi T(q-k)} \frac{\left[e^{2i\pi\frac{T}{N}(q-k)\lambda}\right]_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}}}{2i}}$$

$$= \frac{\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\gamma_k|^2 + \sum_k \sum_{q\neq k} \gamma_k \bar{\gamma}_q \frac{\sin 2\pi \frac{q-k}{N}}{\pi(q-k)}}{\sum_{k=0}^{N-1} \|\gamma_k\|^2} \qquad \text{(IV-5 ; 17)}$$

En posant

$$M_{qk} = \begin{cases} \frac{2}{N} \text{ si } q = k \\ \frac{\sin 2\pi \frac{q-k}{N}}{\pi(q-k)} \quad \text{si } q \neq k \end{cases}$$

et $\bar{\gamma}t = \gamma^*$, (IV-5 ; 17) peut s'écrire

$$\boxed{\beta = \frac{\gamma^* M \gamma}{\gamma^* \gamma}} \qquad \text{(IV-5 ; 18)}$$

et l'on sait que le maximum d'un tel rapport est atteint lorsque γ est proportionnel au vecteur propre u_o correspondant à la plus grande valeur propre σ_o de M et dans ce cas $\beta = \sigma_o$.

$$\gamma = \rho\, u_o \qquad\qquad \rho \in \mathbb{C} \quad u_o \in \mathbb{R}^N$$

Pour la facilité d'emploi nous prendrons $\gamma \in \mathbb{R}^N$ et nous choisirons ρ de façon que $\mathfrak{F}[\nabla/N](0) = 1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k = N$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{N}{\sum_{k=0}^{N-1} u_{o_k}} \qquad \text{(IV-5 ; 19)}$$

γ étant vecteur propre de M correspondant à la valeur propre σ_o vérifie :

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{q,k}\, \gamma_k = \sigma_o\, \gamma_q \qquad q = 0,\dots,N-1 \qquad \text{(IV-5 ; 20)}$$

et pour $q' = N-1-q$

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{N-1-q',k}\, \gamma_k = \sigma_o\, \gamma_{N-1-q'}$$

De par la définition de M

$$M_{n-1-q',k} = \frac{\sin 2\pi(\frac{N-1-q'-k}{N})}{\pi(N-1-q'-k)} = M_{q',N-1-k}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N-1} M_{q',N-1-k}\, \gamma_k = \sigma_o \gamma_{N-1-q'}$$

En posant $k' = N-1-k$

$$\sum_{k'=0}^{N-1} M_{q',k'}\, \gamma_{N-1-k'} = \sigma_o\, \gamma_{N-1-q'}$$

Si l'on définit le vecteur λ par

$$\lambda_p = \gamma_{N-1-p} \qquad \forall p \in \{0,\dots,N-1\}$$

On obtient

$$\sum_{k'=0}^{N-1} M_{q',k'} \lambda_{k'} = \sigma_o \lambda_{q'}$$

=> Le vecteur λ est aussi vecteur propre de M correspondant à la même valeur propre σ_o que γ. Etant tous les deux normalisés

$$\lambda = \gamma$$

c'est-à-dire

$$\gamma_p = \gamma_{N-1-p} \qquad \forall p \in \{0,\dots,N-1\} \qquad \text{(IV-5 ; 21)}$$

La figure 7 représente les composantes du vecteur γ obtenu pour N = 16 (On a alors $\beta = \sigma_o = 0.9816$) et N = 32 ($\sigma_o = 0.9812$) (**)

Utilisation

Voyons ce qui se passe lorsqu'on remplace Δ par ∇ dans le produit avec la fonction g

$$<\nabla g,\varphi> = <\nabla, g\varphi>$$

$$=< \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, \delta_{\frac{kT}{N}} \, , g\varphi>$$

** Lorsque N est grand, la forme de la matrice M permet d'en calculer la plus grande valeur propre et le vecteur propre correspondant sans la rentrer complètement en machine puisque qu'une seule de ses lignes permet de la déterminer complètement.

$$= < \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, g_k \, \delta_{\frac{kT}{N}} , \varphi >$$

$$=> \quad \boxed{\nabla g = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \, g_k \delta_{\frac{kT}{N}}} \qquad \text{(IV-5 ; 22)}$$

Vouloir faire la convolution de $\mathfrak{F} g$ avec $\frac{1}{N} \mathfrak{F} \nabla$ revient donc à effectuer une pondération des échantillonnages g_k par les γ_k.

$$G'_j = \frac{1}{N} [\mathfrak{F} \nabla * \mathfrak{F} g] (\tfrac{j}{T}) = \text{D.F.T.} \ (\gamma_k \cdot g_k)$$

Si l'on effectue cette pondération simultanément sur les échantillons g_{1_k} et g_{2_k} des fonctions g_1 et g_2 en calculant le cross-spectre des distributions $\frac{1}{N} \nabla g_1$ et $\frac{1}{N} \nabla g_2$ on obtient

$$W_j^{opt} = \overline{G'_{1_j}} \cdot G'_{2_j} = r^1 r^2 \, e^{-i(\varphi^2 - \varphi^1)} \, |\mathfrak{F} [\nabla/N]|^2 (\tfrac{j}{T} - f)$$

Voir les résultats obtenus sur l'exemple numérique.

La courbe de la figure 8 est celle de $|\mathfrak{F} [\nabla]|^2(\lambda)$
On a également représenté (Fig. 8') les variations de la somme de $|\mathfrak{F} [\nabla]|^2(\lambda)$ et de $|\mathfrak{F} [\nabla]|^2(\lambda - \frac{1}{T})$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{T}]$.
On voit que cette somme ne s'écarte que de 3 % de sa valeur moyenne.

CHAPITRE - V

POSSIBILITES ET VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY & TUKEY

CONVOLUTION - LISSAGE TRIGONOMETRIQUE

V-1 - D.F.T. SIMULTANEE DES ECHANTILLONS DE DEUX FONCTIONS REELLES

Soient g_1 et g_2 deux fonctions réelles dont les échantillonnages aux instants $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\dots,N-1)$ ont fourni les vecteurs $\vec{g_1}$ et $\vec{g_2}$.

Si l'on désire calculer les D.F.T. (ou les I.D.F.T.) de ces vecteurs nous allons voir comment cela est possible en n'utilisant l'algorithme de Cooley et Tukey qu'une seule fois au lieu de deux.

Supposons que

$$\vec{g_1} \xrightarrow{\text{D.F.T.}} \overrightarrow{G_1^-} = \overrightarrow{RG_1^-} + i\overrightarrow{IG_1^-}$$

et

$$\vec{g_2} \xrightarrow{\text{D.F.T.}} \overrightarrow{G_2^-} = \overrightarrow{RG_2^-} + i\overrightarrow{IG_2^-}$$

où

$$\overrightarrow{RG_1^-},\ \overrightarrow{IG_1^-},\ \overrightarrow{RG_2^-},\ \overrightarrow{IG_2^-} \in \mathbb{R}^n$$

g_1 réelle entraîne

$$G^-_{1_{N-j}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{(N-j)}{N}} g_k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2i\pi\frac{jk}{N}} g_k$$

$$G^-_{1_{N-j}} = \overline{G^-_{1_j}} = RG^-_{1_j} - iIG^-_{1_j} \qquad (V-1\ ;\ 1)$$

De même

$$G^-_{2_{N-j}} = \overline{G^-_{2_j}} = RG^-_{2_j} - iIG^-_{2_j}$$

Posons

$$g_k = g_{1_k} + ig_{2_k} \qquad k = 0,\ldots,N-1 \qquad (V-1\ ;\ 2)$$

et calculons la D.F.T. du vecteur complexe ainsi obtenu.
On a

$$G^-_j = RG^-_{1_j} - IG^-_{2_j} + i(RG^-_{2_j} + IG^-_{1_j})$$

et

$$G^-_{N-j} = RG^-_{1_j} + IG^-_{2_j} + i(RG^-_{2_j} - IG^-_{1_j})$$

soit en posant

$$G^-_j = RG^-_j + iG^-_j \qquad j = 0,\ldots,N-1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} RG^-_{1_j} = \frac{1}{2}(RG^-_j + RG^-_{N-j}) & RG^-_{2_j} = \frac{1}{2}(IG^-_{N-j} + IG^-_j) \\ IG^-_{1_j} = \frac{1}{2}(IG^-_j - IG^-_{N-j}) & IG^-_{2_j} = \frac{1}{2}(RG^-_{N-j} - IG^-_j) \end{array}} \qquad (V-1\ ;\ 3)$$

=> pour calculer les D.F.T. de deux vecteurs réels on peut calculer la D.F.T. du vecteur complexe ayant pour partie réelle le premier vecteur et pour partie imaginaire le second et reconstituer parties réelles et parties imaginaires des résultats par les formules (V-1 ; 3).
Même possibilité avec l'I.D.F.T.

V-2 - VARIANTES DE L'ALGORITHME DE COOLEY ET TUKEY

V-2-1 - Variante n° 1

Tel qu'il a été décrit au chapitre I, l'algorithme de Cooley et Tukey fournit un vecteur résultant $\vec{G}$ ayant autant de composantes que le vecteur de départ $\vec{g}$. Dans certains cas, on peut ne vouloir calculer que les premières composantes de $\vec{G}$ (correspondant aux fréquences les plus basses). Nous allons montrer que cela est possible tout en conservant les avantages de l'algorithme initial dans le cas où l'on veut obtenir un vecteur $\vec{G}$ ayant 2^M composantes ($j = 0,\ldots,2^M-1$) à partir d'un vecteur $\vec{g}$ ayant N composantes ($k = 0,\ldots,N-1$) avec

$$N = Q \times 2^M \qquad\qquad Q \in \mathbb{N} \qquad\qquad (V\text{-}2\ ;\ 1)$$

Supposons donc que l'on veuille calculer

$$G_j = \sum_{k=0}^{Q\times 2^M-1} e^{2i\pi\frac{jk}{Q\times 2^M}} \qquad \text{pour } j = 0,\ldots,2^M-1 \qquad (V\text{-}2\ ;\ 2)$$

L'indice k variant de 0 à $Q \times 2^{M-1}$ peut s'écrire de façon unique :

$$k = r \times Q+s \quad \begin{cases} r \in \{0,\ldots,2^M-1\} \\ s \in \{0,\ldots,Q-1\} \end{cases} \qquad (V\text{-}2\ ;\ 3)$$

L'expression de G_j devient

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} \sum_{r=0}^{2^M-1} e^{2i\pi\frac{j(r\times Q+s)}{Q\times 2^M}} g_{r\times Q+s}$$

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2i\pi\frac{js}{Q\times 2^M}} \sum_{r=0}^{2^M-1} e^{2i\pi\frac{jr}{2^M}} g_r^{(s)} \qquad (IV\text{-}2\ ;\ 4)$$

où $\vec{g}^{(s)} \in \mathbb{C}^{2^M}$ est un sous-vecteur de $\vec{g}$ ($g_r^{(s)} = g_{r\times Q+s}$)

En posant

$$\vec{G}^{(S)} = \text{I.D.F.T.}\ (\vec{g}^{(s)}) \qquad \text{pour } s = 0,\ldots,Q-1$$

(V-2 ; 4) s'écrit

$$G_j = \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2i\pi \frac{js}{Q\times 2^M}} G_j^{(s)}$$

Soit, en notation matricielle :

$$G = \sum_{s=0}^{Q-1} D^s\ G^{(s)} \qquad \text{(V-2 ; 5)}$$

où D est la matrice diagonale $D_{jj} = e^{2i\pi \frac{j}{Q\times 2^M}}$ $\quad j = 0,\ldots,2^M-1$

On est ramené à appliquer l'algorithme classique à l'ordre 2^M simultanément aux Q sous-vecteurs $g^{(s)}$ de g, à multiplier les résultats $G^{(s)}$ par des matrices diagonales et à en faire la somme.

Coût : pour chaque $G^{(s)}$: $M \times 2^{M-1}$

pour chaque produit $D^s.G^{(s)}$: 2^M

Le tout Q fois, soit : $Q \times (M\times 2^{M-1}+2^M) \simeq (M+1) \times N$

V-2-2 - Variante n° 2

Dans l'algorithme initial, le pas en fréquence est fixé par la longueur de l'intervalle [0,T] sur lequel on a échantillonné la fonction (voir II-1-1)

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

Il est possible de choisir un pas en fréquence multiple de celui-ci :

$$\Delta f' = \frac{d}{T} \qquad\qquad d \in \mathbb{N}$$

dans le cas

$$N = d \times 2^M$$

et de calculer

$$G_j = \bar{\mathcal{F}}[\Delta g]\left(\frac{j\times d}{T}\right) = \sum_{k=0}^{d\times 2^M-1} e^{2i\pi\frac{j\times d\times k}{d\times 2^M}} g_k \qquad \text{pour } j = 0,\ldots,2^M-1 \qquad \text{(V-2 ; 6)}$$

$$k \in \{0,\ldots,d\times 2^M-1\} \Rightarrow k = t\times 2^M + r \quad \begin{cases} t \in \{0,\ldots,d-1\} \\ r \in \{0,\ldots,2^M-1\} \end{cases}$$

$$G_j = \sum_{r=0}^{2^M-1} e^{2i\pi\frac{jk}{2^M}} \sum_{t=0}^{d-1} g_{t\times 2^M+r}$$

$$G_j = \sum_{r=0}^{2^M-1} e^{2i\pi\frac{jk}{2^M}} \tilde{g}_r \qquad \text{(V-2 ; 7)}$$

Pour cela il faut donc appliquer l'algorithme classique à l'ordre 2^M au vecteur $\vec{\tilde{g}}$ somme de d sous-vecteurs de $\vec{g}$

$$\tilde{g}_r = \sum_{t=0}^{d-1} g_{t\times 2^M+r} \qquad\qquad r = 0,\ldots,2^M-1$$

La procédure CTG en ALGOL présentée en annexe autorise les variantes 1 et 2. Elle nécessite $N = Q \times d \times 2^M$.

V-2-3 - Variante n° 3

Pour concilier la possibilité de calculer simultanément la D.F.T. de deux échantillons réels (V-1) et les variantes 1 et 2, on a écrit la procédure CTGSYM (voir annexe) qui calcule

$$G_j^+ = \bar{\mathcal{F}}[\Delta g](\frac{j \times d}{T}) \quad \text{ou} \quad G_j^- = \frac{1}{N}\mathcal{F}[\Delta g](\frac{j \times d}{T}) \tag{V-2 ; 8}$$

$$\text{pour } j = 0,\ldots,2^M-1 \quad \text{et} \quad j = -2^M,\ldots,-1.$$

V-3 - CONVOLUTION DISCRETE DE DEUX ECHANTILLONS

V-3-1 - Définition

Soient deux vecteurs $\vec{g_1}$ et $\vec{g_2}$ correspondant aux échantillonnages aux instants $k\frac{T}{N}$ $(k = 0,\ldots,N-1)$ de deux fonctions g_1 et g_2.

Leur convolution discrète est le vecteur $\vec{gg}$ dont les composantes sont les poids des masses de Dirac du produit de convolution des distributions Δg_1 et Δg_2.

$$(\Delta g_1) * (\Delta g_2) = \sum_{k=0}^{N-1} g_{1_k} \sum_{q=0}^{N-1} g_{2_q} \delta_{(k+q)\frac{T}{N}} \tag{V-3 ; 1}$$

Posons

$$p = k+q \Rightarrow q = p-k$$

$$(\Delta g_1) * (\Delta g_2) = \sum_{k=0}^{N-1} g_{1_k} \sum_{p=k}^{N-1+k} g_{2_{p-k}} \delta_{p\frac{T}{N}}$$

$$= \sum_{p=0}^{2(N-1)} \Big(\sum_{k=\max(0,p-N+1)}^{\min(p,N-1)} g_{1_k} g_{2_{p-k}} \Big) \delta_{p\frac{T}{N}}$$

$$(\Delta g_1) * (\Delta g_2) = \sum_{p=0}^{2(N-1)} gg_p \delta_{p\frac{T}{N}} \tag{V-3 ; 2}$$

La convolution discrète de deux vecteurs de C^N est donc un vecteur de C^{2N-1} défini par

$$gg_p = \sum_{k=\max(0,p-N+1)}^{\min(p,N-1)} g_{1_k}\, g_{2_{p-k}} \qquad p = 0,\ldots,2(N-1) \qquad (V\text{-}3\ ;\ 3)$$

V-3-2 - Convolution discrète regroupée

C'est le vecteur $\vec{gg}'$ de $\mathbb{C}^N$ construit à partir de $\vec{gg}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} gg'_p &= gg_p + gg_{p+N} \qquad p = 0,\ldots,N-2 \\ gg'_{N-1} &= gg_{N-1} \end{aligned} \qquad (V\text{-}3\ ;\ 4)$$

ce qui revient à :

$$gg'_p = \sum_{k=0}^{N-1} g_{1_k}\, g_{2_{p-k(\mathrm{mod}\ N)}} \qquad p = 0,\ldots,N-1 \qquad (V\text{-}3\ ;\ 5)$$

V-3-3 - D.F.T. et I.D.F.T. de gg'

$$\begin{aligned} GG'^{-}_j &= G^{-}_{1_j} \cdot G^{-}_{2_j} = \frac{1}{N^2}\, \mathfrak{F}\left[(\Delta g_1) * (\Delta g_2)\right]\left(\frac{j}{T}\right) \\ GG'^{+}_j &= G^{+}_{1_j} \cdot G^{+}_{2_j} = \overline{\mathfrak{F}}\left[(\Delta g_1) * (\Delta g_2)\right]\left(\frac{j}{T}\right) \end{aligned} \qquad (V\text{-}3;\ 6)$$

V-4 - LISSAGE D'UN ECHANTILLON

Supposons que g soit une fonction semi-périodique :

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \, e^{2i\pi f_m t} \tag{V-4 ; 1}$$

Sa transformée de Fourier est la distribution

$$G = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \, \delta_{f_m} \tag{V-4 ; 2}$$

Le lissage parfait de g qui éliminerait les composants de fréquence $f_m > F$ reviendrait à multiplier G par la "fenêtre" C_F

$$C_F(f) = \begin{cases} 1 \text{ si } |f| < F \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{V-4 ; 3}$$

$$G^* = G.C_F \tag{V-4 ; 4}$$

$$G^* = \sum_{m \in I_F} c_m \, \delta_{f_m} \tag{V-4 ; 5}$$

où

$$I_F = \{m \in Z \mid |f_m| < F\}$$

La fonction g^* lissée serait alors égale à

$$g^* = \sum_{m \in I_F} c_m \, e^{2i\pi f_m t} \tag{V-4 ; 6}$$

La propriété fondamentale des T.F. nous donnerait, compte-tenu de (V-4; 4)

$$g^* = g * \bar{\mathfrak{F}} [C_F] \qquad (V\text{-}4\ ;\ 7)$$

Pour lisser la fonction g en éliminant ses composants de fréquence supérieure à F en valeur absolue, il faudrait donc effectuer la convolution de g avec la fonction

$$\bar{\mathfrak{F}} [C_F](t) = \frac{\sin 2\pi F t}{\pi t} \qquad (V\text{-}4\ ;\ 8)$$

qui est à support infini.

Le fait de prélever des échantillons de la fonction g à raison de N valeurs équidistantes sur un intervalle de longueur T n'entraîne pas que l'on fasse disparaître les composants de fréquence f_m supérieure à $\frac{N}{2T}$ en valeur absolue.
Du fait du repliement du spectre (phénomène d'Aliasing) ces composants interviennent à des fréquences $f_{o_m} = f_m \pmod{\frac{N}{T}}$ comprises entre $-\frac{N}{2T}$ et $\frac{N}{2T}$ (voir périodicité de $\frac{1}{N} \mathfrak{F} [\Delta]$ au §II-1).

Echantillonner n'est pas lisser

Une fonction g dont on sait que les composants en fréquence sont significatifs jusqu'à une fréquence f_{MAX} devra être échantillonnée N fois sur un intervalle de longueur T avec

$$\frac{N}{T} > 2 f_{MAX}$$

sous peine de retrouver en basse fréquence l'influence des composants de haute fréquence sans pouvoir les éliminer plus tard par un procédé de lissage quelqu'il soit.

V-4-1 - Premier procédé de lissage (cf. [5] LANCZOS p. 331).

Si l'on veut lisser le résultat d'un échantillonnage $\vec{g}$ en éliminant les composants de fréquence supérieure à F en valeur absolue ($F < \frac{N}{2T}$) on peut procéder comme suit :

1 - Calculer la D.F.T. de $\vec{g}$

$$g_k \xrightarrow{\text{D.F.T.}} G_j$$

2 - A partir de $\vec{G}$ construire le vecteur $\vec{G}^*$ en posant (compte-tenu de la remarque du § II-1-2) :

$$G_j^* = \begin{cases} G_j \text{ si } 0 \leq \frac{j}{T} < F \quad \text{ou} \quad \frac{N}{T} - F < \frac{j}{T} < \frac{N}{T} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

3 - Calculer l'I.D.F.T. de $\vec{G}^*$ qui nous donne le vecteur lissé $\vec{g}^*$

$$G_j^* \xrightarrow{\text{I.D.F.T.}} g_k^*$$

La figure 12 illustre ce procédé qui est très efficace mais nécessite deux fois l'emploi de l'algorithme de Cooley et Tukey.

V-4-2 - Deuxième procédé de lissage

On opère directement sur le vecteur $\vec{g}$ (g_k ; $k = 0,\ldots,N-1$) en remplaçant chaque composante par une pondération faisant intervenir les valeurs voisines :

Formule à 2p+1 points : $g_k^* = \sum_{s=-p}^{p} \alpha_s \, g_{k-s}$ (V-4 ; 9)

en supposant $g_q = 0$ si $q \notin \{0,\dots,N-1\}$.

$\vec{g}^*$ est le résultat de la convolution discrète de $\vec{g}$ avec $\vec{\alpha}$ (voir § V-3).
On peut considérer ses composantes comme les échantillons de la fonction g^* telle que

$$\Delta . g^* = \Delta . g * \left(\sum_{s=-p}^{p} \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right) \qquad \text{(V-4 ; 10)}$$

En prenant la T.F. de cette expression

$$\mathfrak{F}[\Delta g^*](\lambda) = \mathfrak{F}[\Delta g](\lambda) . \mathfrak{F}\left[\sum_{s=-p}^{p} \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right](\lambda) \qquad \text{(V-4 ; 11)}$$

$$\mathfrak{F}\left[\sum_{s=-p}^{p} \alpha_s \delta_{\frac{sT}{N}} \right](\lambda) = \sum_{s=-p}^{p} \alpha_s \, e^{-2i\pi \frac{sT}{N} \lambda} = S(\lambda) \qquad \text{(V-4 ; 12)}$$

$S(\lambda)$ est une fonction périodique de période $\frac{N}{T}$.

Nous allons déterminer les α_s de façon à éliminer le mieux possible les composants de fréquence f_m telle que $F < f_m < \frac{N}{2T}$ dans la distribution Δg^*.

L'idéal serait que $S(\lambda)$ soit la fonction $C_F^{N/T}(\lambda)$ de période $\frac{N}{T}$, égale à 1 pour $|\lambda| < F$ et nulle ailleurs (le premier procédé de lissage se ramène à cela puisque l'on calculait $\mathfrak{F}[\Delta g](\frac{j}{T})$ et qu'on l'annulait pour $|\frac{j}{T}| > F$).
Malheureusement $S(\lambda)$ a pour coefficientsde Fourier les α_s dont on limite le nombre à 2p+1 tandis que $C_F^{N/T}(\lambda)$ en a une infinité.

La détermination des α_s peut se faire de façon que

$$\beta' = \frac{\int_{-F}^{+F} |S(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{-\frac{N}{2T}}^{\frac{N}{2T}} |S(\lambda)|^2 d\lambda} \qquad \text{(V-4 ; 13)}$$

soit maximum.

Le calcul est analogue à celui du § IV-5-5 et α est le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre (= β') de la matrice M' :

$$M'_{qk} = \begin{cases} \frac{2FT}{N} & \text{si} = q = k = -p,\ldots,p \\ \frac{\sin 2\pi \frac{FT}{N}(q-k)}{\pi(q-k)} & \text{si } q \neq k \end{cases} \qquad \text{(V-4 ; 14)}$$

On normalisera $\vec{\alpha}$ de façon que $\sum_{s=-p}^{p} \alpha_s = 1$.

On montre aisément que $\alpha_{-s} = \alpha_s$.

On remarque que p étant fixé, les α_s ne dépendent que du produit de la fréquence de coupure F par le pas $\frac{T}{N}$ de l'échantillonnage.

A N N E X E

-:-:-:-:-:-

COEFFICIENTS DE FOURIER

DU SINUS REDRESSE

$$g(t) = \left| \frac{\pi}{2} \sin(t) \right| \qquad C_o = 1 \qquad C_m = - \frac{2}{(2m+1)(2m-1)}$$

Paramètres de la procédure C T G : N = 128 , M = 5 , D = 1 , SIGNE = -1.0

m	Partie Réelle		Partie Imaginaire	
	Exacte	Calculée	Exacte	Calculée
0	1.0	9.999'-01	0.0	0.0
1	-6.667'-01	-6.668'-01	0.0	1.099'-07
2	-1.333'-01	-1.334'-01	0.0	2.109'-07
3	-5.714'-02	-5.724'-02	0.0	3.711'-07
4	-3.175'-02	-3.185'-02	0.0	3.749'-07
5	-2.020'-02	-2.030'-02	0.0	5.110'-07
6	-1.399'-02	-1.409'-02	0.0	7.899'-08
7	-1.026'-02	-1.036'-02	0.0	2.926'-07
8	-7.843'-03	-7.944'-03	0.0	-4.543'-08
9	-6.192'-03	-6.294'-03	0.0	2.083'-07
10	-5.013'-03	-5.114'-03	0.0	9.080'-09
11	-4.141'-03	-4.243'-03	0.0	2.343'-07
12	-3.478'-03	-3.580'-03	0.0	6.103'-08
13	-2.963'-03	-3.065'-03	0.0	2.542'-07
14	-2.554'-03	-2.657'-03	0.0	7.248'-08
15	-2.225'-03	-2.328'-03	0.0	3.019'-07
16	-1.955'-03	-2.058'-03	0.0	-2.276'-07
17	-1.732'-03	-1.836'-03	0.0	1.873'-07
18	-1.544'-03	-1.649'-03	0.0	-9.399'-08
19	-1.386'-03	-1.491'-03	0.0	1.167'-07
20	-1.251'-03	-1.356'-03	0.0	2.579'-08
21	-1.134'-03	-1.240'-03	0.0	1.215'-07
22	-1.034'-03	-1.140'-03	0.0	6.199'-08
23	-9.456'-04	-1.053'-03	0.0	1.403'-07
24	-8.684'-04	-9.762'-04	0.0	-7.945'-08
25	-8.003'-04	-9.088'-04	0.0	1.176'-07
26	-7.399'-04	-8.491'-04	0.0	-5.789'-08
27	-6.861'-04	-7.961'-04	0.0	-1.356'-08
28	-6.380'-04	-7.485'-04	0.0	-1.765'-08
29	-5.947'-04	-7.063'-04	0.0	5.952'-08
30	-5.557'-04	-6.680'-04	0.0	5.979'-08
31	-5.204'-04	-6.337'-04	0.0	2.275'-07